

Тема 24. Задачі на складання диференціальних рівнянь економічного змісту

Питання: економічні задачі, їх розв'язування з допомогою диференціальних рівнянь

Мета: ознайомитись з економічними задачами, які розв'язуються за допомогою диференціальних рівнянь.

Кількість годин: 3

Вид контролю: письмове опитування

Між предметні зв'язки: бухгалтерський облік

Рекомендована література:

1. Вища математика для економістів. Конспект лекцій (І курс) / Уклад.: Ю. П. Буценко, О. О. Диховичний, О. А. Тимошенко. — К: НТУУ «КПІ», 2014. — 256с.
2. Вища математика: навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. / В.П. Дубовик., П. Юрик. - 4-те вид. - К. : Ігнатекс-Україна., 2013. - 648 с: іл. - (Вища школа). - Бібліогр.: с. 632-633.
3. Математика для економістів. Елементи лінійної алгебри: Методичні вказівки та завдання для типових розрахунків / Уклад.: В.М. Долгих, О.М. Назаренко. — Суми: УАБС НБУ, 2005. — 38 с.
4. Мельниченко О.П., Ревецька У.С. Вища математика: Збірник задач та методичні рекомендації для проведення практичних занять та самостійної роботи студентів денної форми навчання економічних спеціальностей. — Біла Церква.— 2010.— 83с.

План вивчення:

1. Написати стислий конспект (вказати номер, тему самостійної роботи) за наступним планом:
 - 1) Знаходження функції затрат за допомогою диференціальних рівнянь.
 - 2) Формула для визначення кількості населення у будь-який момент часу.
 - 3) Знаходження величини вкладу в банк у будь-який момент часу за допомогою диференціальних рівнянь.

2. Знати:

- ✓ формулу знаходження функції затрат;
- ✓ формулу для визначення кількості населення у будь-який момент часу;
- ✓ формулу знаходження величини вкладу в банк у будь-який момент часу.

3. Розглянути приклади.

Завдання для самоперевірки:

Навести приклади економічних задач, що обчислюються за допомогою диференціальних рівнянь.

Тема 24. Задачі на складання диференціальних рівнянь економічного змісту.

При розв'язанні багатьох задач математики, техніки, економіки та інших галузей науки буває важко встановити закон, який зв'язує шукані і відомі змінні величини. Але вдається встановити зв'язок між похідними або диференціалами цих змінних, який виражається рівняннями або системами рівнянь. Такі рівняння називають диференціальними рівняннями. Термін “диференціальне рівняння” введений у 1676 році Г.В.Лейбніцем.

Задача 1. Повні затрати K є функцією об'єму виробництва x . Знайти функцію K затрат, якщо відомо, що швидкість росту затрат для всіх значень x дорівнює середнім затратам.

Розв'язування. Швидкість росту затрат є похідна: $\frac{dK}{dx}$, а середні затрати $\frac{K}{x}$. За умовою задачі $\frac{dK}{dx} = \frac{K}{x}$, а це рівняння з відокремлюваними змінними.

$$\text{Отже, } \frac{dK}{K} = \frac{dx}{x}; \quad \ln|K| = \ln|x| + \ln|C|; \quad \ln|K| = \ln|Cx|;$$

$K=Cx$ - шукана функція затрат.

Звідси, $\frac{K}{x} = C$ - середні затрати постійні.

Задача 2. Кількість населення y є функцією часу t , тобто з часом кількість населення змінюється. Швидкість зміни приросту населення пропорційна кількості населення. Треба знайти формулу для визначення кількості населення y будь-який момент часу t .

Розв'язування. За умовою задачі швидкість зміни приросту населення пропорційна кількості населення. Це можна записати так:

$$\frac{dy}{dt} = k \cdot y(t), \text{ де } k - \text{коефіцієнт пропорційності.}$$

В одержаному диференціальному рівнянні відокремимо змінні:

$$\frac{dy}{y} = k dt.$$

$$\text{Далі будемо мати: } \ln|y| = kt + \ln|C|; \quad \ln|y| - \ln|C| = kt; \quad \ln\left|\frac{y}{C}\right| = kt;$$

$$y = Ce^{kt}. \quad (7.19)$$

Одержано формулу для визначення кількості населення як функції часу. Вона містить довільну сталу, яка може приймати будь-які числові значення.

Покажемо на прикладі як за формулою (7.19) можна прогнозувати ріст населення. Для зручності візьмемо наближені дані.

Нехай за переписом 1980 року населення на Землі було, наприклад, 5 млрд. Почнемо звідси відлік, тобто $t_0=0$. А в 1990 році населення на Землі стало 6 млрд., тобто $t=10$ (років). Тоді, використавши ці початкові умови, одержимо: $5=C \cdot e^{k \cdot 0}$; $C=5$.

Підставимо знайдене $C=5$ у формулу $y=Ce^{kt}$, маємо

$$6 = 5 \cdot e^{10 \cdot k}; \quad 10k = \ln \frac{6}{5}; \quad k = \frac{1}{10} \ln \frac{6}{5}.$$

Ми знайшли коефіцієнт пропорційності.

Враховуючи, що $k = \frac{1}{10} \ln \frac{6}{5}$, формулу $y = Ce^{kt}$ запишемо у вигляді

$$y = 5e^{\frac{1}{10} \ln \frac{6}{5} \cdot t} \quad \text{або} \quad y = 5e^{\frac{1}{10} t \cdot \ln \frac{6}{5}}. \quad (7.20)$$

Формула (7.20) дає можливість знайти кількість населення у будь-який момент часу t , наприклад, знайдемо кількість населення у 2010 році ($t=30$):

$$y = 5e^{\frac{1}{10} \cdot 30 \cdot \ln \frac{6}{5}} = 5 \cdot e^{\left(\frac{6}{5}\right)^3} = 5 \cdot \left(\frac{6}{5}\right)^3 = \frac{6^3}{5^2} = \frac{216}{25} \approx 8,6 (\text{млрд.})$$

Задача 3. Нехай в момент часу t величина вкладу в банк $g=g(t)$. Очевидно, що збільшення (зміна) вкладу пропорційне його

величині: $\frac{dg}{dt} = kg(t)$; $\frac{dg}{g} = k dt$; $\ln|g| = kt + \ln|C|$;

$$\ln \left| \frac{g}{C} \right| = kt; \quad g = C \cdot e^{kt}. \quad (7.21)$$

Нехай при $t=0$ початковий вклад в банк був g_0 , тоді $g_0 = Ce^0$ і формула (7.21) запишеться:

$$g = g_0 e^{kt}. \quad (7.22)$$

Нехай величина вкладу змінюється неперервно з часом і за місяць зростає на $N\%$:

$$g_0 + \frac{N}{100} \cdot g_0 = g_0 e^{k \cdot 1} \quad (t=1 \text{ місяць}), \quad \text{звідки} \quad k = \ln \left(1 + \frac{N}{100} \right).$$

$$\text{Підставимо } k \text{ у (7.22): } g = g_0 \cdot e^{\ln \left(1 + \frac{N}{100} \right) \cdot t} = g_0 \left(1 + \frac{N}{100} \right)^t;$$

Остання формула дає можливість визначити величину вкладу в банк в будь-який момент часу t .