

Тема 23. Рівняння, що допускають зниження порядку

Питання:

1. Рівняння, що допускають зниження порядку, основні поняття та означення
2. Приклади розв'язання рівнянь

Мета: визначити поняття «Рівняння, що допускають зниження порядку», розглянути рівняння II порядку, що дозволяють зниження порядку

Кількість годин: 2

Вид контролю: письмове опитування

Між предметні зв'язки: бухгалтерський облік

Рекомендована література:

1. Вища математика для економістів. Конспект лекцій (I курс) / Уклад.: Ю. П. Буценко, О. О. Диховичний, О. А. Тимошенко. — К: НТУУ «КПІ», 2014. — 256с.
2. Вища математика: навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. / В.П. Дубовик., П. Юрик. - 4-те вид. - К. : Ігнатекс-Україна., 2013. - 648 с: іл. - (Вища школа). - Бібліогр.: с. 632-633.
3. Математика для економістів. Елементи лінійної алгебри: Методичні вказівки та завдання для типових розрахунків / Уклад.: В.М. Долгих, О.М. Назаренко. — Суми: УАБС НБУ, 2005. — 38 с.
4. Мельниченко О.П., Ревецька У.С. Вища математика: Збірник задач та методичні рекомендації для проведення практичних занять та самостійної роботи студентів денної форми навчання економічних спеціальностей. — Біла Церква.— 2010.— 83с.

План вивчення:

1. Написати стислий конспект (вказати номер, тему самостійної роботи) за наступним планом:
 - 1) Диференціальні рівняння, що допускають зниження порядку, основні поняття та означення
 - 2) Типи диференціальних рівнянь вищого порядку, що допускають зниження порядку.

2. Знати:

- ✓ означення диференціального рівняння;
- ✓ типи диференціальних рівнянь вищого порядку, що допускають зниження порядку.

3. Розглянути приклади.

Завдання для самоперевірки:

1) Знайти загальне рішення рівняння $y''' = \sin x + \cos x$

2) Знайти загальне рішення рівняння $y''(x^2 + 1) = 2xy'$

3) Знайти загальне рішення рівняння $yy'' = 1 - (y')^2$

Знайти загальне рішення рівняння $y \frac{d^2 y}{dx^2} - \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = 0$

Тема 23. Рівняння, що допускають зниження порядку.

Вивчаючи [явища природи](#), розв'язуючи різноманітні задачі з фізики, техніки, біології, економіки, не завжди можна безпосередньо встановити прямий зв'язок між [величинами](#), що описують той чи інший еволюційний процес. Здебільшого визначають залежність між величинами (функціями) та швидкостями їх зміни відносно інших (незалежних) змінних величин. При цьому складаються рівняння, в яких невідомі функції містяться під знаком похідної. Такі рівняння називають диференціальними.

Розглянемо деякі типи диференціальних рівнянь вищого порядку, що допускають зниження порядку.

1) Рівняння не містить шуканої функції і її похідних до $(k-1)$ -порядку включно

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)} \dots, y^{(n)}) = 0.$$

Зробивши заміну: $y^{(k)} = z$, $y^{(k+1)} = z'$, $\dots$, $y^{(n)} = z^{(n-k)}$,

одержимо рівняння $(n-k)$ -порядку $F(x, z, y', \dots, z^{(n-k)}) = 0$.

2) Рівняння не містить явно незалежної змінної

$$F(y, y', \dots, y^{(n)}) = 0.$$

Будемо вважати, що y - нова незалежна змінна, а $y', \dots, y^{(n)}$ - функції від y . Тоді

$$y'_x = p(y),$$

$$y''_{x^2} = \frac{d}{dx} y'_x = \frac{d}{dy} (p(y)) \frac{dy}{dx} = p'_y p,$$

$$y'''_{x^3} = \frac{d}{dx} y''_{x^2} = \frac{d}{dy} (p'_y p) \frac{dy}{dx} = (p''_{y^2} p + p'^2_{y^2}) p,$$

.....

Після підстановки одержимо $F(y, p, p'_y p, (p''_{y^2} p + p'^2_{y^2}) p, \dots, p^{(n-1)}) = 0$ диференціальне рівняння $(n-1)$ -порядку.

3) Нехай функція F диференціального рівняння

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

є однорідної щодо аргументів $y, y', \dots, y^{(n)}$.

Робимо заміну $y = e^{\int u dx}$, де $u = u(x)$ - нова невідома функція. Одержимо

$$y' = e^{\int u dx} u,$$

$$y'' = e^{\int u dx} u^2 + e^{\int u dx} u' = e^{\int u dx} (u^2 + u'),$$

$$y''' = e^{\int u dx} u(u^2 + u') + e^{\int u dx} (2uu' + u'') = \\ = e^{\int u dx} (u^3 + 3uu' + u''),$$

.....

Після підстановки одержимо

$$F(x, e^{\int u dx}, e^{\int u dx} u, e^{\int u dx} (u^2 + u'), e^{\int u dx} (u^3 + 3uu' + u''), \dots) = 0.$$

Оскільки рівняння однорідне відносно $e^{\int u dx}$, то цей член можна винести і на нього скоротити. Одержимо

$$F(x, 1, u, u^2 + u', u^3 + 3uu' + u'', \dots, u^{(n-1)}) = 0$$

диференціальне рівняння $(n-1)$ -порядку.

4) Нехай ліва частина рівняння

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

є похідної деякого диференціального вираза ступеня $(n-1)$, тобто

$$\frac{d}{dx} \Phi(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) = F(x, y, y', \dots, y^{(n)}).$$

У цьому випадку легко обчислюється, так званий, перший інтеграл

$$\Phi(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) = C.$$

5) Нехай диференціальне рівняння

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0,$$

розписано у вигляді диференціалів

$$\Phi(x, y, dx, dy, d^2y, \dots, d^ny) = 0$$

і Φ - функція однорідна по всім перемінним. Зробимо заміну $x = e^t$, $y = ue^t$, де u, t - нові змінні. Тоді одержуємо

$$dx = e^t dt, \quad y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{u'_t e^t + u e^t}{e^t} = u'_t + u, \quad y''_{x^2} = \frac{d}{dx} y'_x = \frac{d}{dt} (u'_t + u) \frac{dt}{dx} = \frac{u''_t + u'_t}{e^t},$$

$$y_{x^3}''' = \frac{d}{dx} y_{x^2}'' = \frac{d}{dt} \left(\frac{u_{t^2}'' + u_t'}{e^t} \right) \frac{dt}{dx} =$$

$$= \frac{(u_{t^3}''' + u_{t^2}'')e^t - (u_{t^2}'' + u_t')e^t}{e^{3t}} = \frac{u_{t^3}''' - u_t'}{e^{2t}} \dots$$

Підставивши, одержимо

$$\Phi(x, y, dx, dy, d^2y, \dots, d^n y) =$$

$$= \Phi(e^t, u e^t, e^t dt, (u_t' + u) e^t dt, (u_{t^2}'' + u_t') e^t dt, \dots) = 0.$$

Скоротивши на e^t одержимо $\Phi(1, u, dt, u_t' + u, u_{t^2}'' + u_t', \dots, u_t^{(n)}) = 0$.

Тобто одержимо диференціальне рівняння, що не містить явно незалежної змінної, або повертаємося до другого випадку.

Рівняння II порядку, що дозволяють зниження порядку

Випадок 1. $y'' = F(x, y')$. Заміна $y' = z$, $y'' = \frac{dz}{dx}$.

Приклад

Розв'язати рівняння $y'' + y' \operatorname{tg} x = \sin 2x$.

Розв'язок. Це рівняння не містить y . Вважаючи $y' = z$, перетворимо рівняння до виду $z' + z \operatorname{tg} x = \sin 2x$.

Інтегруємо його. Вважаючи в рівнянні $z = u v$, $z' = u' v + u v'$, одержимо:

$$u' v + u v' + u v \operatorname{tg} x = \sin 2x, \quad u' v + u (v' + v \operatorname{tg} x) = \sin 2x.$$

$$\text{Визначаємо } v, \text{ поклавши } v' + v \operatorname{tg} x = 0, \quad \frac{dv}{dx} + v \operatorname{tg} x = 0, \quad \int \frac{dv}{v} = \int -\frac{\sin x}{\cos x} dx,$$

відкіля $\ln |v| = \ln |\cos x|$, або $v = \cos x$.

Визначимо $u(x)$:

$$\cos x \frac{du}{dx} = 2 \sin x \cos x, \quad du = 2 \sin x dx, \quad \text{відкіля } u(x) = -2 \cos x + C_1; \text{ отже,}$$

$$z = \cos x (-2 \cos x + C_1).$$

Повертаючись до змінної y , маємо

$$\frac{dy}{dx} = -2 \cos^2 x + C_1 \cos x \Rightarrow$$

$$\int dy = -2 \int \cos^2 x dx + \int C_1 \cos x dx + C_2,$$

$$y = -2 \int \frac{1 + \cos 2x}{2} dx + C_1 \sin x + C_2,$$

$$y = -x - \frac{\sin 2x}{2} + C_1 \sin x + C_2.$$

Випадок 2. Диференціальне рівняння виду $F(y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$, яке не містить незалежної змінної.

Рівняння цього виду допускає зниження порядку за допомогою заміни $y' = z$,

$$y'' = z \frac{dz}{dy}, \text{ або } y'' = zz'.$$

Приклад

Розв'язати рівняння $2yy'' = 1 + y'^2$.

Розв'язок. Вважаючи $y' = z$, $y'' = z z'$, отримаємо рівняння I порядку відносно невідомих y і z .

$$2y z z' = 1 + z^2.$$

Розділимо змінні і проінтегруємо:

$$\frac{2z}{1+z^2} dz - \frac{dy}{y} = 0, \quad \ln|1+z^2| - \ln|y| = \ln|C_1|,$$

$$\frac{1+z^2}{y} = C_1, \quad 1+z^2 = yC_1, \quad z = \pm \sqrt{yC_1 - 1}.$$

Повертаючись до змінної x , отримаємо

$$y' = \pm \sqrt{yC_1 - 1}, \quad \pm \frac{dy}{\sqrt{yC_1 - 1}} = dx, \quad \pm \frac{2}{C_1} \sqrt{yC_1 - 1} = x + C_2,$$

$$\pm 2\sqrt{yC_1 - 1} = C_1(x + C_2), \quad 4(yC_1 - 1) = C_1^2(x + C_2)^2,$$

$$4yC_1 = C_1^2(x + C_2)^2 + 4, \quad y = \frac{C_1^2(x + C_2)^2 + 4}{4C_1}.$$