

Тема 22. Рівняння в повних диференціалах

Мета: визначити поняття «рівняння в повних диференціалах», «рівняння, що допускають зниження порядку», розглянути загальний розв’язок рівнянь в повних диференціалах

Кількість годин: 2

Вид контролю: письмове опитування

Між предметні зв’язки: бухгалтерський облік

Рекомендована література:

1. Вища математика для економістів. Конспект лекцій (І курс) / Уклад.: Ю. П. Буценко, О. О. Диховичний, О. А. Тимошенко. — К: НТУУ «КПІ», 2014. — 256с.
2. Вища математика: навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. / В.П. Дубовик., П. Юрик. - 4-те вид. - К. : Ігнатекс-Україна., 2013. - 648 с: іл. - (Вища школа). - Бібліогр.: с. 632-633.
3. Математика для економістів. Елементи лінійної алгебри: Методичні вказівки та завдання для типових розрахунків / Уклад.: В.М. Долгих, О.М. Назаренко. — Суми: УАБС НБУ, 2005. — 38 с.
4. Мельниченко О.П., Ревецька У.С. Вища математика: Збірник задач та методичні рекомендації для проведення практичних занять та самостійної роботи студентів денної форми навчання економічних спеціальностей. — Біла Церква.— 2010.— 83с.

План вивчення:

1. Написати стислий конспект (вказати номер, тему самостійної роботи) за наступним планом:
 - 1) Рівняння в повних диференціалах.
 - 2) Рівняння, що допускають зниження порядку.
2. Знати:
 - ✓ означення рівняння в повних диференціалах;
 - ✓ необхідну та достатню умову повного диференціалу;
 - ✓ алгоритм розв’язання рівняння в повних диференціалах.

3. Розглянути приклади.

Завдання для самоперевірки:

Для закріплення тематики необхідно самостійно перевірити, що дані рівняння є рівняннями в повних диференціалах, і розв'язати їх:

$$2xydx + (x^2 - y^2)dy = 0;$$

$$(2 - 9xy^2)x dx + (4y^2 - 6x^3)y dy = 0;$$

$$e^{-y} dx - (2y + xe^{-y}) dy = 0;$$

$$\frac{y}{x} dx + (y^3 + \ln x) dy = 0;$$

$$\frac{3x^2 + y^2}{y^2} dx - \frac{2x^3 + 5y}{y^3} dy = 0;$$

$$2x(1 + \sqrt{x^2 - y}) dx - \sqrt{x^2 - y} dy = 0;$$

$$(1 + y^2 \sin 2x) dx - 2y \cos^2 x dy = 0;$$

$$3x^2(1 + \ln y) dx = (2y - \frac{x^3}{y}) dy;$$

$$(\frac{x}{\sin y} + 2) dx + \frac{(x^2 + 1) \cos y}{\cos 2y - 1} dy = 0;$$

$$(2x + ye^{xy}) dx + (xe^{xy} + 3y^2) dy = 0.$$

Тема 22. Рівняння в повних диференціалах.

Рівняння в повних диференціалах. Рівняння, що допускають зниження порядку.

1. Рівняння в повних диференціалах.
2. Рівняння, що допускають зниження порядку.

Рівняння виду

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

називається рівнянням у повних диференціалах, якщо його ліва частина є повним диференціалом деякої функції $u(x, y)$, тобто

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = du(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy.$$

Загальний інтеграл рівняння має вигляд

$$u(x, y) = C.$$

Для того, щоб рівняння було рівнянням у повних диференціалах, необхідно і достатньо, щоб

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}.$$

Функція $u(x, y)$ знаходять за формулою

$$u(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y_0) dx + \int_{y_0}^y Q(x, y) dy.$$

Якщо ліва частина рівняння не є повним диференціалом і задовольняє умови теореми Коші, то існує така функція $\mu = \mu(x, y)$, що

$\mu(P(x, y)dx + Q(x, y)dy) = du = 0$. Функція $\mu(x, y)$ називається інтегрувальним множником і задовольняє умову

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu P) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu Q).$$

Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$(3x^2y + 2)dx + (x^3 + 3y^2)dy = 0$$

2. Нехай маємо рівняння виду $y^{(n)} = f(x)$

Розв'язок цього рівняння знаходиться n-кратним інтегруванням:

$$y^{(n)} = f(x),$$

$$y^{(n-1)} = \int f(x)dx + C_1 = f_1(x) + C_1,$$

$$y^{(n-2)} = \int [f_1(x) + C_1]dx = f_2(x) + C_1x + C_2,$$

$$y = f_n(x) + \frac{C_1}{(n-1)!}x^{n-1} + \frac{C_2}{(n-2)!}x^{n-2} + \dots + C_{n-1}x + C_n,$$

$$\text{де } f_n(x) = \underbrace{\int \int \int}_{n \text{ раз}} f(x) dx^n.$$

Тому що $\frac{C_1}{(n-1)!}, \frac{C_2}{(n-2)!}, \dots$, є сталі, то загальний розв'язок може бути

записаний і так:

$$y = f_n(x) + C_1x^{n-1} + C_2x^{n-2} + \dots + C_{n-1}x + C_n.$$

Приклад

Знайти розв'язок задачі Коші: $y'' = xe^{-x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Розв'язок. Знайдемо загальний розв'язок послідовним інтегруванням даного рівняння

$$y' = \int xe^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x} + C_1,$$

$$y = \int [-xe^{-x} - e^{-x} + C_1]dx = xe^{-x} + 2e^{-x} + C_1x + C_2.$$

$$y = (x + 2)e^{-x} + C_1x + C_2.$$

Скористаємося початковими умовами: $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$

$$y' = e^{-x} - (x + 2)e^{-x} + C_1$$

$$y'(0) = 0 : \quad 0 = e^0 - 2e^0 + C_1, \quad C_1 = 1.$$

$$y(0) = 1 : \quad 1 = 2e^0 + C_2, \quad C_2 = -1.$$

Отже, шуканий частинний розв'язок має вигляд:

$$y = (x + 2)e^{-x} + x - 1.$$

Додаток до теми 22

Диференціальні рівняння в повних диференціалах. Приклади

Всі студенти ВУЗів, що шукають інформацію **"Як обчислювати рівняння на повний диференціал?"** з цього уроку отримають повну інструкцію та в додаток готові приклади. Спершу коротке ознайомлення - **що таке рівняння в повних диференціалах? Як обчислювати рівняння на повний диференціал?**

Далі розбір готових прикладів, після яких можливо у Вас не залишиться питань по даній темі.

Рівняння в повних диференціалах

Означення 1. Рівняння вигляду $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ називається рівнянням в повних диференціалах, якщо залежність перед знаком рівності є повним диференціалом деякої функції двох змінних $u(x,y)$, тобто справедлива формула

$$du(x,y) = M(x,y)dx + N(x,y)dy. \quad (1)$$

Таким чином, початкове рівняння за змістом означає рівність нулю повного диференціалу функції $du(x,y) = 0$.

Інтегруючи диференціал отримаємо **загальний інтеграл** ДР у вигляді $u(x,y) = C$. (2)

При обчисленнях, як правило, сталу покладають рівною нулю.

Перед обчисленнями завжди постає питання, як перевірити, що задане ДР є рівнянням в повних диференціалах. На це питання дає відповідь наступна умова.

Необхідна і достатня умова повного диференціалу

Необхідною і достатньою умовою повного диференціала є рівність між собою частинних похідних

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}. \quad (3)$$

При розв'язанні диференціальних рівнянь її перевіряють в першу чергу, щоб ідентифікувати чи маємо рівняння в повних диференціалах, чи можливо інше.

За змістом ця умова означає, що мішані похідні функції рівні, тобто враховуючи залежності

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = M(x,y), \quad \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = N(x,y) \quad (4)$$

необхідну і достатню умову існування повного диференціалу можемо записати формулою

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} \Rightarrow$$
$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x \partial y}.$$

Наведений критерій і застосовують при перевірці рівняння відповідності повному диференціалу, хоча при вивченні даної теми викладачі не зададуть Вам іншого типу рівнянь.

Алгоритм розв'язання рівняння в повних диференціалах

З позначень (4) часткових похідних повного диференціалу функції $u(x,y)$ слідує, що її можемо знайти інтегруванням

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = M(x,y), \quad \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = N(x,y) \Rightarrow$$

1. $u(x,y) = \int M(x,y) dx + C(y);$
2. $u(x,y) = \int N(x,y) dy + C(x).$

Ці формули дають вибір при обчисленнях, тому для інтегрування вибирають ту часткову похідну, інтеграл від якої легше знайти на практиці.

Далі другий важливий момент – невизначений інтеграл являє собою первісну, тобто "+C", яку слід визначити.

Тому, якщо інтегруємо часткову похідну $M(x,y)$ по "ікс" то стала залежить від "ігрик" і навпаки – якщо інтегруємо $N(x,y)$ по "ігрик" то стала залежна від "ікс".

Далі, щоб визначити сталу беруть похідну від $u(x,y)$ по іншій змінній ніж та, що використовували при інтегруванні і прирівнюють до другої часткової

похідної.

В формулах це матиме запис

1. $\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\int M(x, y) dx \right) + \frac{dC(y)}{dy} = N(x, y);$
2. $\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\int N(x, y) dy \right) + \frac{dC(x)}{dx} = M(x, y).$

Як правило деякі доданки спрощуються і отримаємо рівняння на похідну сталої. Для (1) з рівнянь матимемо

$$\begin{aligned} \frac{dC(y)}{dy} &= N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\int M(x, y) dx \right) \Rightarrow \\ C(y) &= \int \left[N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\int M(x, y) dx \right) \right] dy. \end{aligned}$$

Остаточно, загальний інтеграл після визначення сталої має вигляд

$$\int M(x, y) dx + \int \left[N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\int M(x, y) dx \right) \right] dy = C.$$

В симетричній формі отримаємо відповідь і для іншого рівняння.

Запис тільки на вигляд складний, насправді на практиці все виглядає значно простіше і зрозуміліше. Проаналізуйте наступні завдання на повні диференціали.

Приклад 1. Знайти загальний інтеграл диференціального рівняння:

$$\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + y \right) dx + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + x \right) dy = 0$$

Розв'язання: Ліва частина рівняння є **повним диференціалом** деякої функції $u(x, y)$, оскільки виконується умова

$$\begin{aligned} \frac{\partial \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + y \right)}{\partial y} &= \frac{\partial \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + x \right)}{\partial x} \Rightarrow \\ 1 - \frac{xy}{(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2}} &= 1 - \frac{xy}{(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2}}. \end{aligned}$$

Звідси запишемо часткову похідну функції двох змінних від "ікс"

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + y \Rightarrow \int \partial u = \int \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + y \right) dx \Rightarrow$$

та інтегруванням знаходимо її вигляд

$$u = \sqrt{x^2 + y^2} + yx + C(y).$$

Щоб довізнати сталу знаходимо часткову похідну функції по "ігрику" та прирівнюємо зі значенням в рівнянні

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + x + C'(y) \Rightarrow$$
$$\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + x + C'(y) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + x$$

Подібні доданки в правій і лівій частині скорочуємо, після чого стали знаходимо інтегруванням

$$C'(y) = 0 \Rightarrow C(y) = C.$$

Тепер маємо всі величини для запису загального інтегралу диференціального рівняння у вигляді

$$\sqrt{x^2 + y^2} + yx + C = 0.$$

Як можна переконатися, схема розв'язування рівнянь в повних диференціалах не важка і її під силу освоїти кожному. Важливе значення мають множники при диференціалах, оскільки їх доводиться інтегрувати та диференціювати, щоб знайти розв'язок.

Приклад 2. Знайти загальний інтеграл диференціального рівняння

$$\left(\frac{y}{x^2 + y^2} + e^x \right) dx - \frac{x}{x^2 + y^2} dy = 0$$

Розв'язання: За теорією ліва частина рівняння повинна бути повним диференціалом деякої функції двох змінних $u(x, y)$, при цьому перевіряємо чи виконується умова

$$\frac{\partial \left(\frac{y}{x^2 + y^2} + e^x \right)}{\partial y} \equiv \frac{\partial \left(-\frac{x}{x^2 + y^2} \right)}{\partial x} \Rightarrow$$
$$\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \equiv \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}.$$

Звідси записуємо часткову похідну та через інтеграл знаходимо функцію

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y}{x^2 + y^2} + e^x \Rightarrow$$

$$\int \partial u = \int \left(\frac{y}{x^2 + y^2} + e^x \right) \partial x \Rightarrow$$

$$u = \operatorname{arctg} \frac{x}{y} + e^x + C(y).$$

Обчислюємо часткову похідну функції двох змінних по у та прирівнюємо до правої сторони диференціального рівняння.

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{x}{y^2 + x^2} + C'(y) \Rightarrow$$

$$-\frac{x}{y^2 + x^2} + C'(y) = -\frac{x}{x^2 + y^2}.$$

Похідна виражається залежністю

$$C'(y) = 0 \Rightarrow C(y) = C.$$

З врахуванням сталої отримали загальний інтеграл диференціального рівняння у вигляді

$$\operatorname{arctg} \frac{x}{y} + e^x + C = 0.$$

На цьому обчислення даного прикладу завершено.

Приклад 3. Знайти загальний інтеграл диференціального рівняння:

$$(y^3 + \cos x) dx + (3xy^2 + e^y) dy = 0$$

Розв'язання: Ліва частина рівняння буде повним диференціалом деякої функції двох змінних $u(x; y)$, якщо виконуватиметься умова

$$\frac{\partial (y^3 + \cos x)}{\partial y} = \frac{\partial (3xy^2 + e^y)}{\partial x}.$$

Звідси починаємо розв'язування рівняння, а вірніше інтегрування одної з часткових похідних

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y^3 + \cos x \Rightarrow \int \partial u = \int (y^3 + \cos x) \partial x \Rightarrow$$

$$u = y^3 x + \sin x + C(y).$$

Далі знаходимо похідну від отриманої функції по змінній у та прирівнюємо до правої сторони диференціальної залежності

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 3y^2 x + C'(y) \Rightarrow 3y^2 x + C'(y) = 3y^2 x + e^y \Rightarrow$$

$$C'(y) = e^y \Rightarrow C(y) = e^y + C_1.$$

Це дозволяє знайти константу, як функцію від y . Якщо починати розкривати диференціальну залежність з правої сторони, то отримали, що константа залежить від x . **Загальний розв'язок диференціального рівняння** при цьому не зміниться і для заданого рівняння має вигляд

$$y^3 x + \sin x + e^y + C = 0.$$

На цьому приклад розв'язано.

Приклад 4. Знайти загальний інтеграл диференціального рівняння:

$$x e^{y^2} dx + \left(x^2 y e^{y^2} + \operatorname{tg}^2 y \right) dy = 0$$

Розв'язання: Перевіряємо чи є повним диференціалом деякої функції $u(x, y)$ вираз, що прирівнюється до нуля

$$\frac{\partial(x e^{y^2})}{\partial y} = \frac{\partial(x^2 y e^{y^2} + \operatorname{tg}^2 y)}{\partial x} \Rightarrow$$

$$2xy e^{y^2} = 2xy e^{y^2}$$

Випишемо часткову похідну функції двох змінних та **інтегруванням відновлюємо розв'язок**

$$\frac{\partial u}{\partial x} = x e^{y^2} \Rightarrow$$

$$\int \partial u = \int (x e^{y^2}) dx \Rightarrow$$

$$u = \frac{1}{2} x^2 e^{y^2} + C(y).$$

Далі уточнюємо сталу. Для цього **обчислюємо похідну функції по y** та прирівнюємо до значення в рівнянні (виділено зеленим)

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x^2 y e^{y^2} + C'(y) \Rightarrow$$

$$x^2 y e^{y^2} + C'(y) = x^2 y e^{y^2} + \operatorname{tg}^2 y$$

Звідси, виражаємо похідну інтегруванням

$$C'(y) = \operatorname{tg}^2 y \Rightarrow C(y) = \int \operatorname{tg}^2 y dy = \operatorname{tg} y - y.$$

Загальний розв'язок диференціального рівняння маємо право записати формулою

$$\frac{1}{2}x^2e^{y^2} + \operatorname{tg} y - y = 0.$$