

Тема 20. Застосування визначених інтегралів. Використання визначеного інтеграла в економіці

Мета: розглянути можливість застосування визначених інтегралів при розв'язуванні економічних задач

Кількість годин: 3

Вид контролю: письмове опитування

Між предметні зв'язки: бухгалтерський облік

Рекомендована література:

1. Вища математика для економістів. Конспект лекцій (І курс) / Уклад.: Ю. П. Буценко, О. О. Диховичний, О. А. Тимошенко. — К: НТУУ «КПІ», 2014. — 256с.
2. Вища математика: навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. / В.П. Дубовик., П. Юрик. - 4-те вид. - К. : Ігнатекс-Україна., 2013. - 648 с: іл. - (Вища школа). - Бібліогр.: с. 632-633.
3. Математика для економістів. Елементи лінійної алгебри: Методичні вказівки та завдання для типових розрахунків / Уклад.: В.М. Долгих, О.М. Назаренко. — Суми: УАБС НБУ, 2005. — 38 с.
4. Мельниченко О.П., Ревецька У.С. Вища математика: Збірник задач та методичні рекомендації для проведення практичних занять та самостійної роботи студентів денної форми навчання економічних спеціальностей. — Біла Церква.— 2010.— 83с.

План вивчення:

1. Написати стислий конспект (вказати номер, тему самостійної роботи) за наступним планом:
 - 1) Визначення загального обсягу випущеної продукції.
 - 2) Визначення коефіцієнта Джині.
 - 3) Обчислення дисконтованого значення грошових потоків.
 - 4) Розрахунок надлишку виробника та надлишку споживача.
2. Знати:
 - ✓ формулу для обчислення загального обсягу випущеної продукції;
 - ✓ як визначається коефіцієнт Джині;

- ✓ формулу теперішньої вартості майбутніх грошей;
- ✓ чому відповідає ринкова (рівноважна) ціна на кожен товар в умовах досконалої конкуренції;
- ✓ як здійснюється розрахунок надлишку виробника;
- ✓ як здійснюється розрахунок надлишку споживача.

3. Розглянути приклади.

Завдання для самоперевірки:

- 1) Навести приклади визначення загального обсягу випущеної продукції за допомогою визначних інтегралів.
- 2) Навести приклади визначення коефіцієнта Джині за допомогою визначних інтегралів.
- 3) Навести приклади обчислення дисконтованого значення грошових потоків за допомогою визначних інтегралів.
- 4) Навести приклади розрахунку надлишку виробника за допомогою визначних інтегралів.
- 5) Навести приклади розрахунку надлишку споживача за допомогою визначних інтегралів.

Тема 20. Застосування визначених інтегралів. Використання визначеного інтеграла в економіці.

1. Визначення загального обсягу випущеної продукції

Нехай деяка фірма випускає один вид продукції, використовуючи один ресурс. Виробнича функція фірми має вигляд $q=q(x)$, де x - затрати ресурсу, а q - обсяг випуску. Затрати ресурсу x є функцією від часу t , наприклад, $x=x(t)$. Тоді загальний обсяг продукції Q за час від T_0 до T_1 обчислюється за допомогою визначеного інтегралу

$$Q = \int_{T_0}^{T_1} q(x(t)) dt$$

При $q(x) = \sqrt{x}$, $x(t)=100e^{0,2t}$, $T_0=0$ та $T_1=5$ (років) загальний обсяг випущеної за п'ять років продукції

$$Q = \int_0^5 \sqrt{100 \cdot e^{0,2t}} dt = \int_0^5 10 \cdot e^{0,1t} dt = 10 \cdot \frac{1}{0,1} \cdot e^{0,1t} \Big|_0^5 = 100 \cdot (e^{0,5} - e^0) = 64,872 \text{ (одиниць)}$$

2. Визначення коефіцієнта Джинні

Нехай $y=y(x)$ - частка (доля) приватного капіталу деякої країни, яка перебуває у власності групи людей, що становлять частку (долю) x населення цієї країни.

Наприклад, у тому випадку, коли 30% населення володіє 10% капіталу, 60% населення 35% капіталу, і 85% 60% капіталу, маємо таке:

$$y(0,3)=0,1;$$

$$y(0,6)=0,35;$$

$$y(0,85)=0,6.$$

Очевидно, що завжди $y(0)=0$ та $y(1)=1$.

Очевидно також, що у разі абсолютно рівномірного розподілу багатства в країні крива Лоренца є бісектрисою прямого кута (прямою $y = x$). Зі збільшенням нерівності збільшується площа між кривою $y=y(x)$ та прямою $y = x$.

= x. Числове значення цієї площі K ($0 < K < 1/2$) називають коефіцієнтом Джинні.

Приклад. Крива Лоренца деякої країни має вигляд $y = x \cdot \sqrt{x}$. Знайти коефіцієнт Джинні цієї країни.

Із визначення коефіцієнта Джинні випливає, що для кривої Лоренца $y = x \cdot \sqrt{x}$

$$K = 0,5 - \int_0^1 x \sqrt{x} dx = 0,5 - \frac{2}{5} x^{5/2} \Big|_0^1 = 0,5 - 0,4 = 0,1$$

Для кривої Лоренца $y = x^2$ маємо такий коефіцієнт Джинні:

$$K = 0,5 - \int_0^1 x^2 dx = 0,5 - \frac{1}{3} x^3 \Big|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

3. Обчислення дисконтованого значення грошових потоків

Як відомо з теми 3, теперішню вартість майбутніх грошей обчислюють за формулою

$$PV = \frac{FV}{(1+r)^t},$$

де r - ставка відсотка.

Останню формулу для невеликих значень можна записати у вигляді

$$PV = FV \cdot \frac{FV}{(e^{\ln(1+r)})^t} \approx \frac{FV}{(e^r)^t} = FV \cdot e^{-rt},$$

оскільки $\ln(1+r) \approx r$ (справді, $\ln 1,03 = 0,0296$; $\ln 1,05 = 0,0488$; $\ln 1,08 = 0,077$)

Нехай деяка фірма здійснює потік інвестицій $FV_1, FV_2, \dots, FV_n$ в моменти часу $t_1, t_2, \dots, t_n = T$. Тоді дисконтована (чиста) теперішня вартість NPV потоку інвестицій представляє собою суму

$$NPV = \frac{FV_1}{(1+r)^{t_1}} + \frac{FV_2}{(1+r)^{t_2}} + \dots + \frac{FV_n}{(1+r)^{t_n}} = \sum_{i=1}^n \frac{FV_i}{(1+r)^{t_i}} \approx \sum_{i=1}^n FV_i \cdot e^{-rt_i}$$

У тому випадку, коли окремі інвестиції роблять невеликими порціями досить часто (всі $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ - малі, де $t_0 = 0$; $i = 1, \dots, n$), NPV можна вважати

інтегральною сумою, яка в неперервному випадку ($n \rightarrow \infty$; всі $\Delta t_i \rightarrow 0$;

послідовність значень $FV_1 = FV(t_1), FV_2 = FV(t_2), \dots, FV_n = FV(T)$ описує деяка функція $FV(t), 0 \leq t \leq T$) перетворюється в інтеграл

$$NPV = \int_0^T FV(t)e^{-rt} dt$$

Приклад. Нехай потік інвестицій задає функція $FV(t)=100-10t$. Ставка відсотка $r=10\%$ ($r=0,1$). Довжина періоду інвестування $T=5$ (років).

Визначити дисконтовану теперішню вартість потоку (рис.7.7,б):

$$\begin{aligned} NPV &= \int_0^5 (100 - 10t)e^{-0,1t} dt = 100 \int_0^5 e^{-0,1t} dt - 10 \int_0^5 t e^{-0,1t} dt \\ &= 1000e^{-0,1t} \Big|_0^5 - 10 \left(-10te^{-0,1t} \Big|_0^5 - \int_0^5 (10e^{-0,1t}) dt \right) = \\ &= 100(5e^{-0,5} - 0) = \frac{500}{\sqrt{e}} \approx 303 \end{aligned}$$

$$V = \int_0^5 (100 - 10t) dt = 100t \Big|_0^5 - 10 \cdot \frac{t^2}{2} \Big|_0^5 = 100(5 - 0) - 5(25 - 0) = 375$$

4. Розрахунок надлишку виробника та надлишку споживача

З курсу мікроекономіки відомо, що в умовах досконалої конкуренції ринкова (рівноважна) ціна на кожен товар відповідає точці перетину кривої попиту $D=D(Q)$ та кривої пропозиції $S=S(Q)$ (рис. 7.8).

Кожна точка $(P;Q)$ на кривій попиту визначає кількість товару Q , який був би проданий за ціни P . Незважаючи на те, що на ринку весь товар реально продають за ціною P^* , деяка i -та ($i=1, \dots, n$) частина споживачів згідна була б купити свою частку товару DQ^*i , заплативши і дещо вищу ціну $P_i > P^*$ (щоправда, за ціни P_i всього буде продано тільки Q_i одиниць товару). Отже, кожна i -та частина споживачів завдяки ринковому механізму виграє в ціні на $(P_i - P^*)DQ^*i$. Вважаючи, що за деякої досить високої ціни P_0^2 товар не купуватимуть взагалі, маємо такий загальний виграш (надлишок) усіх споживачів:

$$\sum_{i=1}^n (P_i(Q_i) - P^*) \cdot \Delta Q_i$$

де $i=1$ відповідає ціні P_0^2 , а $i=n$ - ціні P^* .

Очевидно, що в неперервному випадку надлишок (виграш) споживачів дорівнює площі $S1$ фігури $P_0^2 E P^*$ (рис.7.8).

Кожна точка $(Q;P)$ на кривій пропозиції визначає кількість товару Q , яка була б продана на ринку за ціни P . Оскільки деяка j -та ($j=1, \dots, m$) частина виробників згідна виробляти та постачати на ринок частку товару DQ_j і за ціни $P_j < P^*$ (однак не нижчою від P_0), то завдяки ринковому механізму (який визначив ціну P^*) загальний надлишок (виграш) усіх виробників дорівнює (де $j=1$ відповідає ціні P_0 , а $j=m$ - ціні P^*)

$$\sum_{j=1}^m (P^* - P_j(Q_j)) \cdot \Delta Q_j, \text{ тобто площі } S2 \text{ фігури } P^* E P_0$$