

Тема 19. Формула Ньютона-Лейбніца. Обчислення визначеного інтеграла

Мета: визначити формулу Ньютона-Лейбніца, розглянути використання її при обчисленні визначеного інтеграла

Кількість годин: 2

Вид контролю: письмове опитування

Між предметні зв'язки: бухгалтерський облік

Рекомендована література:

1. Вища математика для економістів. Конспект лекцій (І курс) / Уклад.: Ю. П. Буценко, О. О. Диховичний, О. А. Тимошенко. — К: НТУУ «КПІ», 2014. — 256с.
2. Вища математика: навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. / В.П Дубовик., П. Юрик. - 4-те вид. - К. : Ігнатекс-Україна., 2013. - 648 с: іл. - (Вища школа). - Бібліогр.: с. 632-633.
3. Математика для економістів. Елементи лінійної алгебри: Методичні вказівки та завдання для типових розрахунків / Уклад.: В.М. Долгих, О.М. Назаренко. — Суми: УАБС НБУ, 2005. — 38 с.
4. Мельниченко О.П., Ревецька У.С. Вища математика: Збірник задач та методичні рекомендації для проведення практичних занять та самостійної роботи студентів денної форми навчання економічних спеціальностей. — Біла Церква.— 2010.— 83с.

План вивчення:

1. Написати стислий конспект (вказати номер, тему самостійної роботи) за наступним планом:
 - 1) Формула Ньютона-Лейбніца.
 - 2) Обчислення визначеного інтеграла за допомогою формули Ньютона-Лейбніца.
2. Знати:
 - ✓ означення операції інтегрування;
 - ✓ означення визначеного інтеграла;
 - ✓ властивості визначеного інтеграла;
 - ✓ формулу Ньютона-Лейбніца для обчислення визначеного інтеграла;
 - ✓ основні методи інтегрування визначеного інтеграла;

✓ застосування визначного інтеграла.

3. Розглянути приклади.

Завдання для самоперевірки:

1) Обчислити інтеграл $\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx$

2) Обчислити інтеграл: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x} \sin x dx$

3) Довести, що

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx, \quad \text{коли } f(x) - \text{парна функція ;}$$

$$\int_0^a f(x) dx = 0, \quad \text{коли } f(x) - \text{непарна функція.}$$

Тема 19. Формула Ньютона - Лейбніца.

Обчислення визначеного інтеграла.

Визначеним інтегралом від неперервної на $[a;b]$ функції $f(x)$ з нижньою межею a і верхньою межею b називають різницю $F(b) - F(a)$, де $F(x)$ - одна

з первинних для функції $f(x)$. Позначають визначений інтеграл так $\int_a^b f(x)dx$.

При обчисленні різниці $F(b) - F(a)$ можна брати будь-яку з первісних функцій $f(x)$, що записуються в загальному вигляді $F(x) + C$. Але прийнято застосовувати ту первісну для якої $C = 0$.

За наведеним означенням маємо:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Цю формулу називають формулою Ньютона-Лейбніца.

Зауважимо, що при обчисленні визначених інтегралів зручно

різницю $F(b) - F(a)$ записують так $F(x) \Big|_a^b$. Застосовуючи це позначення формулу Ньютона-Лейбніца записують ще й у такому вигляді:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Розглянемо приклади знаходження визначень інтегралів.

Приклад

Обчисліть інтеграл $\int_0^{\pi} \sin x dx$.

Розв'язання. Для функції $f(x) = \sin x$ однією з первісних є $F(x) = -\cos x$.
Маємо за формулою Ньютона-Лейбніца

$$\int_0^{\pi} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\pi} = -\cos \pi - (-\cos 0) = -(-1) + 1 = 2.$$

Приклад

Обчисліть інтеграл $\int_{-1}^2 (2x + 3x^2 + 1) dx$.

Розв'язання. Спочатку знайдемо первісну для функції $f(x) = 2x + 3x^2 + 1$.
Використовуючи правила обчислення первісних та таблицю первісних,
маємо:

$$F(x) = 2 \cdot \frac{x^2}{2} + 3 \frac{x^3}{3} + x; \quad F(x) = x^2 + x^3 + x.$$

Матимемо

$$\int_{-1}^2 (2x + 3x^2 + 1) dx = (x^2 + x^3 + x) \Big|_{-1}^2 = (2^2 + 2^3 + 2) - ((-1)^2 + (-1)^3 + (-1)) = 3 - (-1) = 4.$$

Зауважимо, що при оформленні цього прикладу знаходження первісної можна було не записувати окремо. Тоді оформлення набуде наступного вигляду:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 (2x + 3x^2 + 1) \, dx &= \left(2 \cdot \frac{x^2}{2} + 3 \cdot \frac{x^3}{3} + x \right) \bigg|_{-1}^1 = (x^2 + x^3 + x) \bigg|_{-1}^1 = \\ &= (1^2 + 1^3 + 1) - ((-1)^2 + (-1)^3 + (-1)) = 3 - (-1) = 4.\end{aligned}$$