

## **Тема 17. Інтегрування найпростіших дробово-раціональних, ірраціональних, тригонометричних функцій**

**Мета:** ознайомитись з інтегруванням дробово-раціональні, ірраціональні та тригонометричні функції

**Кількість годин:** 2

**Вид контролю:** письмове опитування

**Між предметні зв'язки:** бухгалтерський облік

**Рекомендована література:**

1. Вища математика для економістів. Конспект лекцій (І курс) / Уклад.: Ю. П. Буценко, О. О. Диховичний, О. А. Тимошенко. — К: НТУУ «КПІ», 2014. — 256с.
2. Вища математика: навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. / В.П Дубовик., П. Юрик. - 4-те вид. - К. : Ігнатекс-Україна., 2013. - 648 с: іл. - (Вища школа). - Бібліогр.: с. 632-633.
3. Математика для економістів. Елементи лінійної алгебри: Методичні вказівки та завдання для типових розрахунків / Уклад.: В.М. Долгих, О.М. Назаренко. — Суми: УАБС НБУ, 2005. — 38 с.
4. Мельниченко О.П., Ревецька У.С. Вища математика: Збірник задач та методичні рекомендації для проведення практичних занять та самостійної роботи студентів денної форми навчання економічних спеціальностей. — Біла Церква.— 2010.— 83с.

**План вивчення:**

1. Написати стислий конспект (вказати номер, тему самостійної роботи) за наступним планом:
  - 1) Інтегрування дробово-раціональних, ірраціональних функцій.
  - 2) Інтегрування тригонометричних функцій.
2. Знати:
  - ✓ означення раціонально-дробового дробу;
  - ✓ які раціональні дроби називаються правильними, а які неправильними;
  - ✓ формули розкладу правильного дробу на суму елементарних раціональних дробів;

- ✓ методи розкладу правильних дробів;
- ✓ на чому ґрунтується метод невизначених коефіцієнтів;
- ✓ як інтегруються тригонометричні функції.

3. Розглянути приклади.

**Завдання для самоперевірки:**

1) Звести інтеграл  $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \frac{dx}{x^2}$  до інтеграла від дробово-раціональної функції.

2) Обчислити інтеграл  $I = \int \frac{(x^3 + 1)dx}{x^2 + 2x}$ .

3) Обчислити інтеграл  $\int \sin^4 x dx$ .

# Тема 17. Інтегрування найпростіших дробово-раціональних ірраціональних тригонометричних функцій.

Раціональним дробом називається дріб вигляду  $\frac{P(x)}{Q(x)}$ , де  $P(x)$  та  $Q(x)$  - многочлени.

Раціональний дріб називається правильним, коли степінь  $P(x)$  нижчий степеня  $Q(x)$ , в протилежному випадку дріб називається неправильним. У неправильному дробі завжди можна виділити цілу частину і зобразити його у вигляді суми многочлена та правильного раціонального дробу. Кожний правильний дріб розкладається на суму елементарних раціональних дробів типу:

$$\frac{A}{x-a}; \quad \frac{A}{(x-a)^m} \quad (m - \text{ціле число, } m > 1),$$

$$\frac{Ax+B}{x^2+px+q}; \quad \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n} \quad (n - \text{ціле число, } n > 1, \text{ квадратний тричлен } x^2+px+q \text{ не має дійсних коренів}).$$

Такий розклад є єдиний, але методи розкладу різноманітні, з яких найбільш уживаний метод невизначених коефіцієнтів. Цей метод ґрунтується на наступному:

1) якщо задано неправильний раціональний дріб, треба виділити з нього цілу частину, тобто привести до вигляду:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = M(x) + \frac{P_1(x)}{Q(x)}, \quad \text{де } M(x) - \text{многочлен, а } \frac{P_1(x)}{Q(x)} - \text{правильний}$$

раціональний дріб;

2) розкласти знаменник дробу на прості множники першого та другого степеня:

$Q(x) = (x-a)^m \cdots (x^2+px+q)^n \cdots$ , де  $\frac{p^2}{4} - q < 0$ , тобто тричлен  $x^2 + px + q$  не має дійсних коренів;

3) правильний раціональний дріб розкласти на суму елементарних:

$$\frac{P_1(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(x-a)^m} + \dots + \frac{A_m}{x-a} + \dots + \frac{B_1x+C_1}{(x^2+px+q)^n} +$$

$$+ \frac{B_2x+C_2}{(x^2+px+q)^{n-1}} + \dots + \frac{B_nx+C_n}{x^2+px+q} + \dots;$$

4) Розглянемо інтегрування елементарних раціональних дробів:

$$1) \int \frac{A dx}{x-a} = A \ln|x-a| + C.$$

$$2) \int \frac{A dx}{(x-a)^m} = A \cdot \frac{(x-a)^{-m+1}}{-m+1} + C = \frac{A}{(1-m)(x-a)^{m-1}} + C.$$

$$3) \int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} \cdot dx, \quad \text{де } p^2 - 4q < 0.$$

Спочатку виділяють в чисельнику дробу  $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$  похідну знаменника, тобто чисельник записують в вигляді:

$$Ax+B = (2x+p) \cdot \frac{A}{2} - \frac{Ap}{2} + B. \quad \text{Тоді:}$$

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} dx = \frac{A}{2} \int \frac{2x+p}{x^2+px+q} dx + \left( B - \frac{Ap}{2} \right) \int \frac{dx}{x^2+px+q}.$$

В першому інтегралі чисельник є похідною знаменника, тому

$$\int \frac{2x+p}{x^2+px+q} dx = \ln(x^2+px+q), \quad \text{бо } x^2+px+q > 0, \quad x \in (-\infty; \infty).$$

Перш ніж знайти другий інтеграл, треба перетворити квадратний тричлен в знаменнику, виділивши повний квадрат:

$$x^2 + px + q = \left( x^2 + 2 \cdot \frac{p}{2} \cdot x + \frac{p^2}{4} \right) - \frac{p^2}{4} + q = \left( x + \frac{p}{2} \right)^2 + q - \frac{p^2}{4}.$$

Тоді другий інтеграл зводиться до табличного арктангенса, або “високого” логарифма.

## Приклад

Знайти інтеграл:  $\int \frac{3x+2}{x^2+2x+10} dx$ .

$$\int \frac{3x+2}{x^2+2x+10} dx = 3 \int \frac{x}{x^2+2x+10} dx + 2 \int \frac{dx}{x^2+2x+10} =$$

$$\left| \begin{array}{l} (x^2+2x+10)' = 2x+2 \\ x^2+2x+10 = (x^2+2x+1)+9 = (x+1)^2+9 \end{array} \right| = \frac{3}{2} \int \frac{(2x+2)-2}{x^2+2x+10} dx +$$

$$+ 2 \int \frac{dx}{x^2+2x+10} = \frac{3}{2} \int \frac{(2x+2)}{x^2+2x+10} dx + (-3+2) \int \frac{d(x+1)}{(x+1)^2+9} =$$

$$\frac{3}{2} \ln(x^2+2x+10) - \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{3} + C.$$

## Інтегрування найпростіших ірраціональних функцій

а) Інтеграли типу  $\int R \left( x, \left( \frac{ax+b}{cx+d} \right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \left( \frac{ax+b}{cx+d} \right)^{\frac{m_2}{n_2}}, \dots \right) dx$ , де  $R$  - раціональна функція,  $m_1, n_1, m_2, n_2, \dots$  - цілі числа, зводяться до інтегралів від

раціональних функцій підстановкою  $\frac{ax+b}{cx+d} = t^s$  де  $s$  - спільний знаменник

показників степенів  $\frac{m_1}{n_1}, \frac{m_2}{n_2}, \dots$ .

## Приклад

---

$$I = \int \frac{dx}{(3+2x)^{\frac{2}{3}} - (3+2x)^{\frac{1}{2}}}.$$

Знайти інтеграл:

Спільний знаменник дробів  $\frac{2}{3}, \frac{1}{2}$  дорівнює  $s = 6$ . Застосовуємо

$$x = \frac{t^6 - 3}{2}, \quad dx = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot t^5 dt = 3t^5 dt$$

підстановку  $3+2x = t^6$  звідки

$$t = \sqrt[6]{2x+3}.$$

Отже,

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{dx}{(3+2x)^{\frac{2}{3}} - (3+2x)^{\frac{1}{2}}} = 3 \int \frac{t^5 dt}{t^4 - t^3} = 3 \int \frac{t^5 dt}{t^3(t-1)} = 3 \int \frac{t^2 dt}{t-1} = \\ &= 3 \int \frac{(t^2 - 1) + 1}{t-1} dt = 3 \int \frac{(t^2 - 1)}{t-1} dt + 3 \int \frac{dt}{t-1} = 3 \int \frac{(t-1)(t+1)}{t-1} dt + 3 \int \frac{d(t-1)}{t-1} = \\ &= 3 \int (t+1) dt + 3 \ln|t-1| = 3 \left( \frac{t^2}{2} + t \right) + 3 \ln|t-1| + C = \\ &= 3 \left( \frac{\sqrt[6]{2x+3}}{2} + \sqrt[6]{2x+3} \right) + 3 \ln|\sqrt[6]{2x+3} - 1| + C. \end{aligned}$$

## Інтегрування деяких тригонометричних функцій.

---

Інтеграли типу  $\int R(\sin x, \cos x) dx$  зводяться до інтегралів від раціональних

функцій за допомогою універсальної підстановки  $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$ .

Тоді

$$x = 2 \operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

## Приклад

---

Знайти інтеграл:  $\int \frac{dx}{8 - 4 \sin x + 7 \cos x}$ .

$$\int \frac{dx}{8 - 4 \sin x + 7 \cos x} = \left| \begin{array}{l} \operatorname{tg} \frac{x}{2} = t; \quad \sin x = \frac{2t}{1+t^2}; \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2}; \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}; \\ 8 - 4 \sin x + 7 \cos x = \\ = 8 - \frac{8t}{1+t^2} + \frac{7(1-t^2)}{1+t^2} = \\ = \frac{t^2 - 8t + 15}{1+t^2} \end{array} \right| = \int \frac{2(1+t^2)dt}{(t^2 - 8t + 15)(1+t^2)} =$$

$$= 2 \int \frac{dt}{t^2 - 8t + 15} = 2 \int \frac{dt}{(t-3)(t-5)} = \int \frac{(t-3) - (t-5)}{(t-3)(t-5)} dt = \int \frac{(t-3)dt}{(t-3)(t-5)} -$$

$$- \int \frac{(t-5)dt}{(t-3)(t-5)} = \int \frac{d(t-5)}{t-5} - \int \frac{d(t-3)}{t-3} = \ln|t-5| - \ln|t-3| + C = \ln \left| \frac{t-5}{t-3} \right| + C =$$

$$= \ln \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 5}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 3} \right| + C.$$

Слід зауважити, що універсальна підстановка в багатьох випадках веде до складних обчислень, тому на практиці здебільшого застосовують інші підстановки, за допомогою яких швидше можна знайти інтеграл, а саме:

а) якщо  $R(\sin x, \cos x)$  - непарна функція відносно  $\sin x$ , тобто

якщо  $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ , то приймають  $\cos x = t$ ;

б) якщо  $R(\sin x, \cos x)$  - непарна функція відносно  $\cos x$ , тобто

якщо  $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ , то приймають  $\sin x = t$ ;

в) якщо  $R(\sin x, \cos x)$  - парна функція відносно  $\sin x$  і  $\cos x$ , тобто

якщо  $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$ , то приймають  $\operatorname{tg} x = t$ .