

Тема 15. Застосування функцій багатьох змінних в економічній теорії

Мета: визначити можливість застосування функцій багатьох змінних при розв'язуванні різноманітних економічних задач

Кількість годин: 2

Вид контролю: письмове опитування

Між предметні зв'язки: бухгалтерський облік

Рекомендована література:

1. Вища математика для економістів. Конспект лекцій (І курс) / Уклад.: Ю. П. Буценко, О. О. Диховичний, О. А. Тимошенко. — К: НТУУ «КПІ», 2014. — 256с.
2. Вища математика: навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. / В.П Дубовик., П. Юрик. - 4-те вид. - К. : Ігнатекс-Україна., 2013. - 648 с: іл. - (Вища школа). - Бібліогр.: с. 632-633.
3. Математика для економістів. Елементи лінійної алгебри: Методичні вказівки та завдання для типових розрахунків / Уклад.: В.М. Долгих, О.М. Назаренко. — Суми: УАБС НБУ, 2005. — 38 с.
4. Мельниченко О.П., Ревецька У.С. Вища математика: Збірник задач та методичні рекомендації для проведення практичних занять та самостійної роботи студентів денної форми навчання економічних спеціальностей. — Біла Церква.— 2010.— 83с.

План вивчення:

1. Написати стислий конспект (вказати номер, тему самостійної роботи) за наступним планом:
 - 1) Аналіз виробництва за допомогою теорії виробничих функцій.
 - 2) Виробнича функція багатьох змінних.
 - 3) Приклади застосування функцій багатьох змінних при розв'язуванні економічних задач.
2. Знати:
 - ✓ означення виробничої функції, виробничої функції багатьох змінних;
 - ✓ як здійснюється аналіз виробництва;

- ✓ суть основної задачі багато ресурсної фірми, та шлях її розв'язання математичними методами;
- ✓ область визначення багатофакторної виробничої функції;
- ✓ як використовується похідна у вирішенні завдань з економічної теорії.

3. Розглянути приклади.

Завдання для самоперевірки:

Дати відповіді на наступні питання:

- 1) Чому в економіці часто необхідно розв'язувати задачі на екстремум функції багатьох змінних?
- 2) Від яких факторів залежать економічні показники?
- 3) При вирішенні яких економічних задач застосовуються методи диференціального числення? Навести конкретні приклади.

Тема 15. Застосування функції багатьох змінних в економічній теорії

Важливими елементами мікро- й макроекономічної теорії раціонального господарювання є, з одного боку, виробник, який витрачає економічні ресурси для виготовлення товарів або надання послуг, а з іншого – виробничі технологічні процеси.

Виробнича функція – це функція, незалежна змінна x якої набуває обсягу ресурсу, котрий використовується у виробництві (фактора виробництва), а залежна змінна y – значення обсягу продукції, котру випускає дане підприємство, фірма або галузь. Позначення виробничої функції: $y=f(x)$. Тут $x(x > 0)$ і $y(y > 0)$ – числові величини, тобто $y = f(x)$ є функцією однієї змінної x . У зв'язку з цим виробничу функцію називають одно ресурсною, або одно факторною. Її область визначення – множина невід'ємних дійсних чисел. Запис $y = f(x)$ означає: якщо ресурс витрачається або використовується в кількості x одиниць, то продукція випускається в кількості $y = f(x)$ одиниць. Знак функції f є характеристикою виробничої функції, яка перетворює ресурс у випуск продукції, і пов'язує між собою незалежну змінну x та залежну змінну y .

Аналіз виробництва здійснюють за допомогою теорії виробничих функцій.

Виробнича функція багатьох змінних – це функція, незалежні змінні $x_1, x_2, \dots, x_n$ якої набувають значень обсягів ресурсів, що використовуються у виробництві (число змінних n дорівнює числу ресурсів), а значення функції виражає обсяг випуску продукції:

$$y = f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Тут $y(y \geq 0)$ – скалярна величина, а x – векторна; $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – координати вектора, тобто $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ є числовою функцією n (багатьох) змінних $(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Її називають багатofакторною виробничою функцією.

За економічним змістом $x_1 \geq 0, \dots, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0$. Отже, областю визначення багатофакторної виробничої функції є множина n -вимірjувальних векторів x , усі координати яких – невід’ємні числа.

Для окремого підприємства виробнича функція $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ може пов’язувати обсяг випуску продукції (в натуральному або вартісному вираженні) з витратами робочого часу за різними видами трудової діяльності, різноманітними видами сировини, енергії, основного капіталу тощо. Виробничі функції такого типу характеризують технологію підприємства.

Будуючи виробничу функцію для регіону або країни в цілому, за обсяг річного випуску у зазвичай беруть їхній сукупний продукт(доход); ресурси розглядають, як основний капітал ($x_1 = K$ – обсяг основного капіталу, що використовується протягом року) і працю ($x_2 = L$ – витрати праці, що використовуються протягом року). Таким чином, дістають двофакторну виробничу функцію $y = f(x_1, x_2) = f(K, L)$, наприклад функцію Кобба-Дугласа.

Доходом R фірми за певний період часу (наприклад у певному році) називають добуток загального обсягу продукції q , що випускається, на (ринкову) ціну p_0 цієї продукції:

$$R = p_0 q.$$

Витратами C фірми називають її загальні витрати за певний інтервал часу, тобто

$$C = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n,$$

Де $x_1, x_2, \dots, x_n$ – обсяги ресурсів, які використовує фірма (фактори виробництва); $p_1, p_2, \dots, p_n$ – ринкові ціни на ці ресурси (фактори виробництва).

Прибутком P фірми за певний інтервал часу називають різницю між одержаним нею доходом та витратами виробництва: $P = R - C$, тобто

$$P(x_1, x_2, \dots, x_n) = p_0 f(x_1, x_2, \dots, x_n) - (p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n).$$

У теорії фірми вважають: якщо фірма функціонує в умовах чистої конкуренції, то на ринкові ціни $p_0, p_1, p_2, \dots, p_n$ вона вплинути не може, тобто фірма „погоджується” із цими цінами.

Основна задача багато ресурсної фірми полягає в тому, що фірма намагається одержати максимальний прибуток шляхом раціонального розподілу ресурсів, які використовуються у виробництві.

З математичного погляду ця задача зводиться до розв'язання задачі про знаходження максимального значення функції прибутку $P = P(x_1, x_2, \dots, x_n)$, тобто функцію прибутку досліджують на екстремум і визначають при яких значеннях $(x^1; x^2; \dots, x^*)$ вона набуває свого найбільшого значення.

Набір ресурсів $(x^1; x^2; \dots, x^*)$, який забезпечує фірмі максимальний прибуток, називають оптимальним.

Фірма може вільно вибирати вектор ресурсів $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, причому $x_i \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, n$. Знайдемо оптимальну для фірми комбінацію ресурсів $(x^1; x^2; \dots, x^*)$, тобто розв'яжемо основну задачу багаторесурсної фірми.

Прирівнявши частинні похідні функції прибутку до нуля, дістанемо

$$\frac{\partial P}{\partial x_1} = \frac{p_1}{p_0}, \quad \frac{\partial P}{\partial x_2} = \frac{p_2}{p_0}, \quad \dots, \quad \frac{\partial P}{\partial x_n} = \frac{p_n}{p_0}. \quad (1)$$

Припустимо, що всі витрати ресурсів строго додатні (нульові просто можна не розглядати). Тоді $(x^1; x^2; \dots; x^*)$, яка визначається співвідношеннями (1), є критичною, й вважатимемо, що умови, які накладаються на виробничу функцію, гарантують, що це точка максимуму. Тоді $(x^1; x^2; \dots; x^*)$ називають оптимальним розв'язком задачі багаторесурсної фірми.

Нехай задано виробничу функцію фірми $f(x, y) = x^{\frac{1}{4}} y^{\frac{1}{2}}$ та ринкові ціни продукції $p_0 = \frac{1}{2}$ умов. грош. од. Знайдемо комбінацію ресурсів $(x^*; y^*)$, за якої фірма одержить максимальний прибуток.

Функція прибутку фірми

$$P(x, y) = 2x^{\frac{1}{4}} y^{\frac{1}{2}} - x - \frac{1}{2}y.$$

Дослідимо її на екстремум. Запишемо необхідні умови існування локального екстремуму. Для цього знайдемо частинні похідні функції прибутку й прирівняємо їх до нуля:

$$\begin{cases} P'_x = 2 \frac{1}{4} x^{-\frac{3}{4}} y^{\frac{1}{2}} - 1 = \frac{1}{2} x^{-\frac{3}{4}} y^{\frac{1}{2}} - 1 = 0, \\ P'_y = 2 \frac{1}{2} x^{\frac{1}{4}} y^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} = x^{\frac{1}{4}} y^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^{\frac{1}{2}} = 2x^{\frac{3}{4}}, \\ \frac{x^{\frac{1}{4}}}{2x^{\frac{3}{4}}} = \frac{1}{2}; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 4x^{\frac{3}{2}}, \\ x = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 4, \\ x = 1. \end{cases}$$

Отже, точка $M(1;4)$ є критичною.

Перевіримо достатні умови. Для цього знайдемо частинні похідні другого порядку та обчислимо їхні значення в точці $M(1;4)$:

$$P''_{xx} = \frac{1}{2} \left(-\frac{3}{4} \right) x^{-\frac{7}{4}} y^{\frac{1}{2}}, \quad P''_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \right) x^{-\frac{3}{4}} y^{-\frac{1}{2}}, \quad P''_{yy} = -\frac{1}{2} x^{\frac{1}{4}} y^{-\frac{3}{2}};$$

$$A = -\frac{3}{8} \cdot 1 \cdot 2 = -\frac{3}{4}, \quad B = \frac{1}{4} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}, \quad C = -\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2^3} = -\frac{1}{16}.$$

Оскільки

$$\Delta = \begin{vmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & -\frac{1}{16} \end{vmatrix} = \frac{3}{64} - \frac{1}{64} = \frac{2}{64} = \frac{1}{32} > 0 \quad \text{і} \quad A = -\frac{3}{4} < 0,$$

то точка $M(1;4)$ – точка локального максимуму.

Обчислимо максимальний прибуток фірми:

$$P_{\max} = R(1;4) = 2 \cdot 1 \cdot 2 - 1 - \frac{1}{2} \cdot 4 = 4 - 1 - 2 = 1.$$

Таким чином, в економіці дуже часто необхідно розв'язувати задачі на екстремум функції багатьох змінних, тому що економічні показники зазвичай залежать від багатьох факторів. Такі задачі добре вивчені теорією функцій багатьох змінних, яка використовує методи диференціального числення.