

Тема 14. Екстремум функцій двох змінних. Умовний екстремум. Найбільше, найменше значення функції в замкненій області

Мета: визначити поняття екстремуму функцій двох змінних, ознайомитись з умовним екстремумом, найбільшим та найменшим значенням функції

Кількість годин: 2

Вид контролю: письмове опитування

Між предметні зв'язки: бухгалтерський облік, інформаційні системи в туризмі

Рекомендована література:

1. Вища математика для економістів. Конспект лекцій (І курс) / Уклад.: Ю. П. Буценко, О. О. Диховичний, О. А. Тимошенко. — К: НТУУ «КПІ», 2014. — 256с.
2. Вища математика: навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. / В.П. Дубовик., П. Юрик. - 4-те вид. - К. : Ігнатекс-Україна., 2013. - 648 с: іл. - (Вища школа). - Бібліогр.: с. 632-633.
3. Математика для економістів. Елементи лінійної алгебри: Методичні вказівки та завдання для типових розрахунків / Уклад.: В.М. Долгих, О.М. Назаренко. — Суми: УАБС НБУ, 2005. — 38 с.
4. Мельниченко О.П., Ревецька У.С. Вища математика: Збірник задач та методичні рекомендації для проведення практичних занять та самостійної роботи студентів денної форми навчання економічних спеціальностей. — Біла Церква.— 2010.— 83с.

План вивчення:

1. Написати стислий конспект (вказати номер, тему самостійної роботи) за наступним планом:
 - 1) Схема дослідження функції двох змінних на екстремум.
 - 2) Умовний екстремум.
 - 3) Найбільше, найменше значення функції в замкненій області.
2. Знати:
 - ✓ означення максимуму(мінімуму) функції двох змінних;
 - ✓ схему дослідження функції двох змінних на екстремум;
 - ✓ означення умовного екстремуму;

✓ суть методу Лагранжа;

✓ як знаходиться найбільше(найменше) значення функції в замкненій області.

3. Розглянути приклади.

Завдання для самоперевірки:

1) Знайти точку максимуму або мінімуму заданої функції

$$Z=4x-6y-x^2-3y^2+5$$

2) Дослідити функцію двох змінних на екстремум

$$Z=3x^2-xy+y^2-7x-8y+2$$

3) Знайти екстремум функції двох змінних

$$Z=2x^2-3y^2+4x+6y+5$$

Тема 14. Екстремум функції двох змінних.

Умовний екстремум. Найбільше та найменше значення функції в замкненій області.

Максимумом (мінімумом) функції двох змінних за означенням, це як і для функцій двох змінних максимальне (мінімальне) її значення. На площині це "горби" і "ями", в просторі – те саме тільки двовимірне зображення. Уявити як правило легко, а от для заданої функції знайти точки екстремуму може не кожен.

Схема дослідження функції двох змінних на екстремум

Перше - це перевірити чи виконуються необхідні умови екстремум, а вони наступні – якщо функція має часткові похідні першого порядку і вони рівні нулю то в цих точках функція може мати екстремуми. На практиці реалізація теорії наступна: обчислюємо часткові похідні і прирівнюємо їх до нуля. В результаті потрібно із системи рівнянь

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

знайти точки $(x_0; y_0)$ підозрілі на екстремум, їх ще називають стаціонарними.

Щоб встановити чи має місце максимум функції, чи мінімум потрібно обчислити часткові похідні другого порядку (A, B, C) в критичних точках

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}; B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}; C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Далі в знайдених точках потрібно обчислити параметр диференціала D

$$D = A \cdot C - B^2.$$

Далі можливі 4 випадки:

- функція має максимум, якщо $A < 0; D > 0$

- функція має мінімум, якщо $A > 0$; $D > 0$
- не має екстремуму, якщо $D < 0$
- при $D = 0$ потрібно проводити додатковий аналіз на екстремум.

Приклад

Знайти екстремум функції двох змінних

$$Z = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 10$$

Розв'язок: Щоб знайти критичні точки функції двох змінних $z = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 10$ спершу нам слід обчислити часткові похідні першого порядку

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2y - 6x; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2x - 4y.$$

Далі прирівнюємо часткові похідні до нуля і розв'язуємо систему рівнянь

$$\begin{cases} 2y - 6x = 0 \\ 2x - 4y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0. \end{cases}$$

Знайдені значення x і y є координатами критичної точки. Щоб не досліджувати функцію в околі точки екстремуму, оскільки не маємо графіка функції, встановимо знаки других часткових похідних в цій точці. Обчислюємо похідну другого порядку в критичній точці $(0;0)$

$$A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -6; \quad B = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2; \quad C = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -4.$$

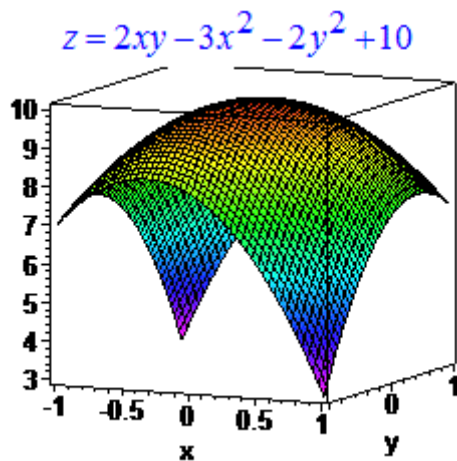
Далі обчислюємо параметр D

$$A \cdot C - B^2 = -6 \cdot (-4) - 2^2 = 24 - 4 = 20 > 0$$

Знак більший нуля, отже в критичній точці $(0;0)$ функція має максимум.

Значення рівне вільному члену $z_{\max} = 10$.

Графік просторової функції в околі точки екстремуму має вигляд



Умовний екстремум

Наприклад, для функції $z = f(x, y)$ треба знайти екстремум не в усій її області існування $D \subset \mathbb{R}^2$, а тільки в точках деякої кривої із цієї області

$$\varphi(x, y) = 0$$

Такий екстремум називають *умовним*.

Метод дослідження функції на умовний екстремум, який не вимагає розв'язання рівнянь типу чи системи таких рівнянь відносно деяких змінних – *метод невизначених множників Лагранжа*.

Приклад

Знайти екстремуми функції $z = 2x - 3y$ при умові $x^2 + y^2 = 13$.

Розв'язання

$$\varphi(x, y) = x^2 + y^2 - 13 = 0$$

функція Лагранжа матиме вигляд

$$F(x, y, \lambda) = 2x - 3y + \lambda(x^2 + y^2 - 13)$$

$$F'_{\delta}(\delta, \phi, \lambda) = (2x - 3y + \lambda(x^2 + y^2 - 13))'_{\delta} = 2 + 2\lambda\delta,$$

$$F'_{\phi}(\delta, \phi, \lambda) = (2x - 3y + \lambda(x^2 + y^2 - 13))'_{\phi} = -3 + 2\lambda\phi,$$

$$F'_{\lambda}(\delta, \phi, \lambda) = (2x - 3y + \lambda(x^2 + y^2 - 13))'_{\lambda} = x^2 + y^2 - 13,$$

то система рівнянь виглядатиме так:

$$\begin{cases} 2 + 2\lambda\delta = 0, \\ -3 + 2\lambda\phi = 0, \\ x^2 + y^2 - 13 = 0. \end{cases}$$

Розв'язуючи цю систему, знаходимо два

розв'язки: $\delta_1 = 2, \phi_1 = -3, \lambda_1 = -\frac{1}{2}; \delta_2 = -2, \phi_2 = 3, \lambda_2 = \frac{1}{2}$. Таким чином,

точками умовного екстремуму можуть бути точки $\vec{I}_1(2; -3)$ та $\vec{I}_2(-2; 3)$.

Перевіримо, чи це так, знайшовши для кожної з точок d^2F .

$$F''_{\delta\delta}(\delta, \phi, \lambda) = (2 + 2\lambda\delta)'_{\delta} = 2\lambda,$$

$$F''_{\delta\phi}(\delta, \phi, \lambda) = (2 + 2\lambda\delta)'_{\phi} = 0,$$

$$F''_{\phi\phi}(\delta, \phi, \lambda) = (-3 + 2\lambda\phi)'_{\phi} = 2\lambda,$$

$$d^2F(x, y, \lambda) = 2\lambda dx^2 + 2\lambda dy^2 = 2\lambda (dx^2 + dy^2).$$

Значить, для точки $\vec{I}_1(2; -3)$ матимемо

$$d^2F\left(2; -3; -\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) (dx^2 + dy^2) = -(dx^2 + dy^2) < 0,$$

тому $\vec{I}_1(2; -3)$ є точкою умовного максимуму, а для точки $\vec{I}_2(-2; 3)$ матимемо

$$d^2F\left(-2; 3; \frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \frac{1}{2} (dx^2 + dy^2) = dx^2 + dy^2 > 0,$$

тому $\vec{I}_2(-2; 3)$ є точкою умовного мінімуму для заданої функції. При цьому

$$z_{\max} = f(2; -3) = 13, \quad z_{\min} = f(-2; 3) = -13.$$

Найбільше/найменше значення ф-ції в замкненій області

Найбільше і найменше значення неперервної в замкненій області функції досягають у внутрішніх точках області (або на межі області), збігаючись відповідно з максимальним або мінімальним значеннями функції.

Тому для пошуку найбільшого і найменшого значень функції в певній замкненій області треба знайти всі внутрішні критичні точки, обчислити в них значення функції, порівняти їх з найбільшим і найменшим значеннями функції на межі області. Найбільше і найменше з цих значень будуть найбільшим та найменшим значеннями неперервної функції в даній замкненій області.

Приклад

Знайти найбільше та найменше значення функції $z = (x - y^2)\sqrt[3]{(x - 1)^2}$ в області, обмеженій лініями $y^2 = x$, $x = 2$.

Розв'язок:

$$z'_x = \sqrt[3]{(x-1)^2} + (x-y^2) \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)}} = \frac{1}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)}} (3(x-1) + 2(x-y^2)) = \frac{1}{3} \frac{5x - 2y^2 - 3}{\sqrt[3]{(x-1)}}$$

$$z'_y = -2y \cdot \sqrt[3]{(x-1)^2}.$$

Для знаходження стаціонарних точок прирівнюємо до нуля частинні похідні

$$\begin{cases} 5x - 2y^2 - 3 = 0, & x \neq 1, \\ 2y \cdot \sqrt[3]{(x-1)^2} = 0. \end{cases}$$

даної функції. Одержимо систему рівнянь

Звідси маємо $x=3/5, y=0$, стаціонарна точка $A(\frac{3}{5}, 0)$ належить заданій області

значення функції у ній дорівнює $z(A) = \frac{3\sqrt[3]{20}}{25}$.

Критичними точками для заданої функції є і точки хорди $\delta=1$, бо в цих точках $z'_x = \infty, z'_y = 0$. У всіх точках цієї хорди $z=0$.

Дослідимо функцію на межі області, яка складається з частини параболи і хорди тієї ж параболи.

На параболі, рівняння якої $y^2 = x$, $z = (x - y^2)\sqrt[3]{(x-1)^2}$ функція має вигляд $z \equiv 0$, тобто на цій частині межі області задана функція дорівнює нулю $z=0$.

На хорді, рівняння якої $\delta=2$, функція має вигляд $z=2-y^2$. Значення цієї функції в стаціонарній точці $y=0$ і в граничних точках $\delta=\sqrt{2}$, $\delta=-\sqrt{2}$ відповідно дорівнюють $z(0)=2$, $z(\sqrt{2})=0$, $z(-\sqrt{2})=0$. Порівнюючи всі знайдені значення функції визначимо, що задана функція має найбільше значення $z=2$ (досягається в точці $(2;0)$) і найменше значення $z=0$ (досягається на хорді $x=1$ і на частині параболи $y^2=x$).

