

Тема 13. Застосування похідної в економічній теорії

Мета: ознайомитись з можливістю використання похідної в економічній теорії

Кількість годин: 2

Вид контролю: письмове опитування

Між предметні зв'язки: бухгалтерський облік

Рекомендована література:

1. Вища математика для економістів. Конспект лекцій (І курс) / Уклад.: Ю. П. Буценко, О. О. Диховичний, О. А. Тимошенко. — К: НТУУ «КПІ», 2014. — 256с.
2. Вища математика: навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. / В.П Дубовик., П. Юрик. - 4-те вид. - К. : Ігнатекс-Україна., 2013. - 648 с: іл. - (Вища школа). - Бібліогр.: с. 632-633.
3. Математика для економістів. Елементи лінійної алгебри: Методичні вказівки та завдання для типових розрахунків / Уклад.: В.М. Долгих, О.М. Назаренко. — Суми: УАБС НБУ, 2005. — 38 с.
4. Мельниченко О.П., Ревецька У.С. Вища математика: Збірник задач та методичні рекомендації для проведення практичних занять та самостійної роботи студентів денної форми навчання економічних спеціальностей. — Біла Церква.— 2010.— 83с.

План вивчення:

1. Написати стислий конспект (вказати номер, тему самостійної роботи) за наступним планом:
 - 1) Граничні величини.
 - 2) Використання похідної при вирішенні завдань з економічної теорії.
2. Знати:
 - ✓ які величини є граничними;
 - ✓ як граничні випрати пов'язані з похідною;
 - ✓ як гранична виручка пов'язана з похідною;
 - ✓ формули, що пов'язують похідну з граничною схильністю до споживання, граничну схильність до заощадження, граничний продукт праці, граничний продукт капіталу, граничну корисність.

3. Розглянути приклади.

Завдання для самоперевірки:

Вміти на конкретному прикладі пояснити як використовується похідна при вирішенні економічних завдань.

Тема 13. Застосування похідної в економічній теорії.

Граничні величини

Граничні величини характеризують не стан (як сумарна чи середня величини), а процес, зміна економічного об'єкта. Отже, похідна виступає як швидкість зміни деякого економічного об'єкта (процесу) з плином часу або щодо іншого досліджуваного фактора.

Звичайно, економіка не завжди дозволяє використовувати граничні величини в силу неподільності багатьох економічних розрахунків, а також переривчастості (дискретності) економічних показників в часі (наприклад, річних, квартальних, місячних і т.д.). У той же час у багатьох випадках можна ефективно використовувати граничні величини.

Розглянемо ситуацію:

q - кількість виробленої продукції,

$TC(q)$ - відповідні даному випуску сукупні витрати

Dq - приріст продукції,

DTC - приріст витрат виробництва.

• **Граничні витрати MC** виражають додаткові витрати на виробництво кожної додаткової одиниці продукції. Іншими словами,

$$MC = TC(q + \Delta q) - TC(q),$$

де $\Delta q = 1$. Використовуючи рівність $\Delta TC \approx dTC$, отримаємо

$$MC = \Delta TC \approx dTC = TC'(q) * \Delta q = TC'(q).$$

Отже, граничні витрати є не що інше, як перша похідна від сукупних витрат, якщо останні представлені як функція від випускається кількості продукції.

Аналогічним чином визначаються і багато інші економічні величини, що

мають граничний характер.

• **Гранична виручка MR** - це додатковий дохід, отриманий при переході від виробництва n -ної до $(n + 1)$ -ої одиниці продукту. Вона являє собою першу похідну від виручки:

$$MR = \frac{dTR}{dq} = \frac{TR'(q) * \Delta q}{q' \Delta q} = TR'(q)$$

Для господарюючого суб'єкта, який діє в умовах досконалої конкуренції:

$$TR = P * Q, \text{ де :}$$

TR - виручка;

P - ціна.

Таким чином $\frac{d(PQ)}{dQ} = P$, й $MR = P$. Це рівність вірно для ринку досконалої конкуренції.

Будь-який індивід використовує свій дохід Y після сплати податків на споживання C і заощадження S . Ясно, що особи з низьким доходом повністю використовують його на споживання, а на заощадження коштів не залишається. Із зростанням доходу суб'єкт не тільки більше споживає, але і більше зберігає. Як встановлено економічною наукою, споживання і заощадження залежать від розміру доходу:

$$Y = C(Y) + S(Y).$$

Використання похідної дозволяє визначити таку категорію:

• **Граничну схильність до споживання MPC** , що показує частку приросту особистого споживання у прирості доходу:

$$MPC = \frac{dC}{dY} = \frac{C'(Y) * \Delta Y}{Y' * \Delta Y} = C'(Y)$$

У міру збільшення доходів MPC зменшується. Частку приросту заощаджень у приросту доходу показує :

- **Гранична схильність до заощадження MPS :**

$$MPC = \frac{dS}{dY} = \frac{S'(Y) * \Delta Y}{Y' * \Delta Y} = S'(Y)$$

Зі збільшенням доходів MPS збільшується.

Оскільки обмеженість ресурсів принципово не усунена, то вирішальне значення набуває віддача від факторів виробництва.

Нехай застосовуваний капітал постійний, а витрати збільшуються.

Можна ввести в економічний аналіз наступну категорію:

- **Граничний продукт праці MP_L** - це додатковий продукт, отриманий у результаті додаткових вкладень праці при незмінній величині капіталу:

$$MP_L = \frac{\Delta Y}{\Delta L} .$$

Якщо вкладення здійснюються досить малими порціями, то

$$MP_L = \frac{dY}{dL} ,$$

так як dY - результат, dL - витрати, то MP_L - гранична продуктивність праці.

- **Граничний продукт капіталу MP_K** - додатковий продукт, отриманий у результаті додаткових вкладень капіталу K при незмінній величині праці:

$$MP_K = \frac{\Delta Y}{\Delta K} .$$

Якщо вкладення здійснюються малими порціями, то

$$MP_K = \frac{dY}{dK} .$$

MP_K характеризує граничну продуктивність капіталу.

Граничної корисності MU висловлює додаткову корисність від кожної додаткової спожитої одиниці блага:

$$MU = \frac{\Delta TU}{\Delta q} .$$

При нескінченно малих змінах гранична корисність є похідна від сукупної корисності, яка представлена як функція від споживаної кількості продукту:

$$MU = \frac{dTU}{dq} = \frac{TU'(q) * \Delta q}{q' * \Delta q} = TU'(q).$$

Приклад

Використання похідної при вирішенні завдань з економічної теорії

Завдання № 1: Функція попиту має вигляд $Q_D = 100 - 20p$, постійні витрати TFC складають 50 грошових одиниць, а змінні витрати TVC на виробництво одиниці продукції - 2 грошові одиниці. Знайти об'єм випуску, що максимізує прибуток монополіста.

Рішення: Прибуток є виручка мінус витрати:

$$\Pi = TR - TC,$$

$$\text{де } TR = p * Q; TC = TFC + TVC.$$

Знайдемо ціну одиниці продукції:

$$20p = 100 - Q \Rightarrow p = 5 - Q/20.$$

Тоді

$$\Pi = (5 - Q/20) Q - (50 + 2Q) = -Q^2 + 60Q - 1000 \text{ @ } \max$$

$$\text{Знайдемо похідну: } \Pi'(Q) = -2Q + 60.$$

$$\text{Прирівняємо похідну до нуля: } -2Q + 60 = 0 \Rightarrow Q = 30.$$

При переході через точку $Q = 30$ функція $\Pi(Q)$ змінює свій знак з плюса на мінус, отже, ця точка є точкою максимуму, і в ній функція прибутку досягає свого максимального значення. Таким чином, обсяг випуску, що максимізує прибуток, дорівнює 30 одиницям продукції.

Завдання № 2: Яка максимальна виручка монополіста, якщо попит аж до перетину з осями описується лінійною функцією $Q = b - ap$, де p - ціна товару, що випускається монополістом; a і b - коефіцієнти функції попиту?

Рішення: Виручка $TR = Qp = p(b - ap)$ досягне максимуму при рівності нулю

похідної за ціною:

$$TR' = (p(b - ap))' = 0.$$

$$TR' = p' \cdot (b - ap) + (b - ap)' \cdot p = b - ap - ap = b - 2ap = 0 \quad \text{І} \quad p = \frac{b}{2a} \quad \text{І}$$

$$\text{І} \quad Q = b - ap = b - a \cdot \frac{b}{2a} = \frac{b}{2}.$$

При цьому максимум виручки складе

$$TR = Qp = \frac{b}{2} \cdot \frac{b}{2a} = \frac{b^2}{4a}.$$