

Тема 11. Зростання, спадання функції. Найбільше, найменше значення функції на відрізку

Мета: визначити поняття зростання, спадання функції, найбільшого та найменшого значення функції на відрізку

Кількість годин: 2

Вид контролю: письмове опитування

Між предметні зв'язки: бухгалтерський облік, інформаційні системи в туризмі

Рекомендована література:

1. Вища математика для економістів. Конспект лекцій (І курс) / Уклад.: Ю. П. Буценко, О. О. Диховичний, О. А. Тимошенко. — К: НТУУ «КПІ», 2014. — 256с.
2. Вища математика: навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. / В.П. Дубовик., П. Юрик. - 4-те вид. - К. : Ігнатекс-Україна., 2013. - 648 с: іл. - (Вища школа). - Бібліогр.: с. 632-633.
3. Математика для економістів. Елементи лінійної алгебри: Методичні вказівки та завдання для типових розрахунків / Уклад.: В.М. Долгих, О.М. Назаренко. — Суми: УАБС НБУ, 2005. — 38 с.
4. Мельниченко О.П., Ревецька У.С. Вища математика: Збірник задач та методичні рекомендації для проведення практичних занять та самостійної роботи студентів денної форми навчання економічних спеціальностей. — Біла Церква.— 2010.— 83с.

План вивчення:

1. Написати стислий конспект (вказати номер, тему самостійної роботи) за наступним планом:
 - 1) Зростання та спадання функції, основні поняття та означення.
 - 2) Найбільше та найменше значення функції на відрізку. Схема знаходження.
2. Знати:
 - ✓ означення зростаючої та спадної функції;
 - ✓ суть теореми Веєрштраса;
 - ✓ схему знаходження найбільшого і найменшого значення функції на проміжку.
3. Розглянути приклади.

Завдання для самоперевірки:

1) Дослідити на екстремум функцію $f(x) = 4x^3 + 6x^2 - 24x - 10$

2) Дослідити на екстремум функцію $f(x) = 2 + \sqrt{\frac{x^3}{x-6}}$

3) Дослідити на екстремум функцію $f(x) = (x+1)e^{-5x}$

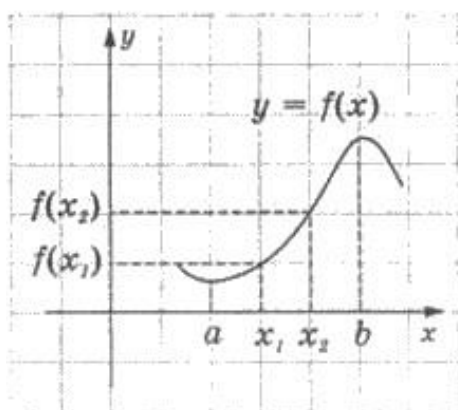
Тема 11. Зростання, спадання функції. Найбільше та найменше значення функції на відрізку.

Зростання та спадання функції

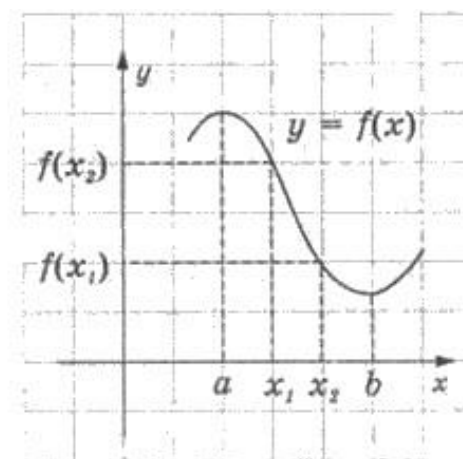
1. Функцію $y = f(x)$ називають **зростаючою** на деякому проміжку, якщо більшому значенню аргументу з цього проміжку відповідає більше значення функції.

На малюнку 64 зображено графік функції $y = f(x)$, що зростає на проміжку $[a; b]$ (проміжок $[a; b]$ при цьому називають проміжком зростання функції).

Для будь-яких x_1 і x_2 з цього проміжку, таких, що $x_2 > x_1$, виконується нерівність $f(x_2) > f(x_1)$.



мал. 64



мал. 65

2. Функцію $y = f(x)$ називають **спадною** на деякому проміжку, якщо більшому значенню аргументу з цього проміжку відповідає менше значення функції.

На малюнку 65 зображено графік функції $y = f(x)$, що спадає на проміжку $[a; b]$ (проміжок $[a; b]$ при цьому називають проміжком спадання функції).

Для будь-яких x_1 і x_2 з цього проміжку, таких, що $x_2 > x_1$, виконується нерівність $f(x_2) < f(x_1)$.

Приклад

Доведіть, що функція $f(x) = x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{6}$ спадає на проміжку $[1; +\infty)$.

Розв'язання:

ОДЗ функції вся дійсна вісь.

Обчислюємо похідну функції

$$f'(x) = 1 + x^2 - x^3 - x^5.$$

З умови рівності нулю похідної визначаємо критичні точки

$$f'(x) = 0 \rightarrow 1 + x^2 - x^3(1 + x^2) = 0 \rightarrow$$

$$(1 + x^2)(1 - x^3) = 0 \rightarrow (1 + x^2)(1 - x)(x^2 + x + 1) = 0.$$

Перша і остання дужка завжди більші нуля

$$1 + x^2 > 0; \quad x^2 + x + 1 > 0.$$

Із середньої знаходимо критичну точку

$$1 - x = 0 \rightarrow x = 1.$$

Оскільки в завданні запитують про характер функції справа від одиниці, то перевіряємо знак похідної, наприклад в точці 2

$$f'(2) = (1 + 2^2)(1 - 2^3) = -35 < 0.$$

Отримали від'ємне значення, отже функція спадає на проміжку від одиниці до безмежності $[1; +\infty)$.

Без обчислення з самого вигляду функції було ясно, що функція спадає при великих значеннях змінної, оскільки коефіцієнт при найстаршому степені від'ємний $(-1/6)$. Потрібно тільки встановити точку максимуму, що ми і зробили через похідну.

Найбільше та найменше значення функції на відрізку

Теорема Вейєрстрасса: неперервна на відрізку $[a; b]$ функція має на цьому відрізку найбільше і найменше значення.

Цю теорему слід розуміти так, що для неперервної на $[a;b]$ функції існують точки відрізка $[a;b]$ у яких $f(x)$ набуває найбільшого та найменшого на $[a;b]$ значення. Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$ і має на цьому відрізку скінченне число критичних точок, то вона набуває свого найбільшого і найменшого значення на цьому відрізку або в критичних точках, які належать цьому відрізку, або на кінцях відрізка.

Схема знаходження найбільшого і найменшого значення функції $y = f(x)$ на проміжку $[a;b]$:

- 1) Перевіряємо входження заданого проміжку в область визначення функції.
- 2) Знаходимо похідну $f'(x)$.
- 3) Знаходимо критичні точки (внутрішні точки області визначення $f(x)$, в яких $f'(x)$ не існує та розв'язати рівняння $f'(x) = 0$.
- 4) Вибираємо критичні точки, що належать проміжку $[a;b]$.
- 5) Обчислюємо значення функції в вибраних критичних точках та в точках a і b .
- 6) Порівнюємо одержані значення та знаходимо найбільше та найменше значення функції $y = f(x)$ на проміжку $[a;b]$.

Приклад

Знайдіть найбільше та найменше значення функції $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$ на проміжку $[0;3]$.

Розв'язання.

- 1) $D(f) = \mathbb{R}$, розглядуваний проміжок належить області визначення.

$$2) f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 = 6(x^2 + x - 2).$$

- 3) Похідна існує в усіх точках; розв'язки рівняння $x^2 + x - 2 = 0$, тобто $x_1 = 1$; $x_2 = -2$ - критичні точки.

$$4) 1 \in [0;3], -2 \notin [0;3].$$

$$5) f(1) = -6; f(0) = 1; f(3) = 46.$$

6) Отже, найбільше значення функції $f(x)$ на заданому проміжку $f(3) = 46$, а найменше - $f(1) = -6$.

7) Це записують наступним чином:

$$\max_{[0;3]} f(x) = f(3) = 46, \quad \min_{[0;3]} f(x) = f(1) = -6.$$