

Тема 9. Диференціал функції, геометричний зміст диференціала. Диференціал вищих порядків

Мета: визначити поняття диференціала функції, розглянути його геометричний зміст, визначити диференціал вищих порядків

Кількість годин: 2

Вид контролю: письмове опитування

Між предметні зв'язки: бухгалтерський облік

Рекомендована література:

1. Вища математика для економістів. Конспект лекцій (І курс) / Уклад.: Ю. П. Буценко, О. О. Диховичний, О. А. Тимошенко. — К: НТУУ «КПІ», 2014. — 256 с.
2. Вища математика: навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. / В.П. Дубовик., П. Юрик. - 4-те вид. - К. : Ігнатекс-Україна., 2013. - 648 с: іл. - (Вища школа). - Бібліогр.: с. 632-633.
3. Математика для економістів. Елементи лінійної алгебри: Методичні вказівки та завдання для типових розрахунків / Уклад.: В.М. Долгих, О.М. Назаренко. — Суми: УАБС НБУ, 2005. — 38 с.
4. Мельниченко О.П., Ревецька У.С. Вища математика: Збірник задач та методичні рекомендації для проведення практичних занять та самостійної роботи студентів денної форми навчання економічних спеціальностей. — Біла Церква.— 2010.— 83с.

План вивчення:

1. Написати стислий конспект (вказати номер, тему самостійної роботи) за наступним планом:
 - 1) Диференціал функції, основні поняття та означення.
 - 2) Знаходження диференціала.
 - 3) Геометричний зміст диференціала.
 - 4) Диференціал вищих порядків.
2. Знати:
 - ✓ означення диференціала функції в точці;

- ✓ правила знаходження диференціала;
- ✓ геометричний зміст диференціала;
- ✓ означення диференціала першого, другого n -го порядку.

3. Розглянути приклади.

Завдання для самоперевірки:

- 1) Знайти похідну другого порядку від функції $y = \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2})$
- 2) Знайти похідну n -го порядку від функції $y = \sin x$
- 3) Знайти похідну y'' функції $y = f(x)$, заданої параметрично: $x = 8 \cos t$,
 $y = 4 \sin t$

Тема 9. Диференціал функції.

Геометричний зміст диференціала.

Диференціал вищих порядків

Диференціал функції

Нехай функція $y = f(x)$ має в даній точці x_0 скінченну

похідну $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Тоді $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha$, де $\alpha \rightarrow 0$, якщо $\Delta x \rightarrow 0$.

Звідки $\Delta y = f'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x$.

Якщо Δx нескінченно малий приріст, то доданок $\alpha \cdot \Delta x$ є нескінченно малим вищого порядку, ніж доданок $f'(x_0) \cdot \Delta x$ і якщо $f'(x_0) \neq 0$, то $f'(x_0) \cdot \Delta x$ і Δx нескінченно малі одного порядку.

Означення. Якщо функція $y = f(x)$ має похідну $f'(x_0)$ в точці x_0 , то вираз $f'(x_0) \cdot \Delta x$ називається *диференціалом* функції в цій точці і позначається символом $dy(x_0)$. Тобто, $dy(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x$.

Зауваження. Диференціал функції $y = f(x)$ в даній точці є головною лінійною частиною приросту функції, пропорційною приросту аргументу з коефіцієнтом пропорційності $f'(x_0)$:

$$\Delta y = dy(x_0) + \alpha \cdot \Delta x.$$

Диференціал незалежної змінної ототожнюється з її приростом, тобто $dx = \Delta x$.

Для будь-якої диференційованої в точці x функції $y = f(x)$ формулу

можна записати так: $dy = f'(x) \cdot dx$. Звідки отримаємо, що $f'(x) = \frac{dy}{dx}$, тобто похідну можна розглядати як відношення двох диференціалів.

Знаходження диференціала

З правил знаходження похідної випливають правила знаходження диференціала. Якщо функції $u(x)$, $v(x)$ диференційовані в точці x , то

$$1) d(u+v) = du + dv.$$

$$2) d(u \cdot v) = v \cdot du + u \cdot dv.$$

$$3) d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v \cdot du - u \cdot dv}{v^2}, \quad (v \neq 0).$$

Приклад

Знайти диференціал функції $y = \sqrt[3]{(2 + \cos x)^2}$.

Перший спосіб. Знаходимо похідну від заданої функції:

$$\begin{aligned} y' &= \left(\sqrt[3]{(2 + \cos x)^2} \right)' = \left((2 + \cos x)^{\frac{2}{3}} \right)' = \frac{2}{3} (2 + \cos x)^{-\frac{1}{3}} \cdot (2 + \cos x)' = \\ &= \frac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{2 + \cos x}} (-\sin x); \end{aligned}$$

$$dy = -\frac{2 \sin x}{3 \cdot \sqrt[3]{2 + \cos x}} dx.$$

Другий спосіб. Знаходимо диференціал, використовуючи формулу:

$$\begin{aligned} dy &= \frac{2}{3} (2 + \cos x)^{-\frac{1}{3}} \cdot d(2 + \cos x) = \frac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{2 + \cos x}} (-\sin x \cdot dx) = \\ &= -\frac{2 \sin x}{3 \cdot \sqrt[3]{2 + \cos x}} dx. \end{aligned}$$

Геометричний зміст диференціала

Нехай $y = f(x)$, $x_0 \in X$ та існує $f'(x_0)$. За означенням диференціала $dy = f'(x_0) \cdot \Delta x$.

Скористаємося геометричним змістом похідної: $f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha$.

З трикутника M_0AB маємо: $|AM_0| \cdot \operatorname{tg} \alpha = |AB|$
або $|AB| = f'(x_0) \cdot \Delta x$.

Але $f'(x_0) \cdot \Delta x = dy$, тому $dy = |AB|$.

Отже, диференціал функції $y = f(x)$ в точці x_0 визначає приріст ординати дотичної до кривої в точці $M_0(x_0, f(x_0))$ при переході від абсциси x_0 до абсциси $x_0 + \Delta x$ (рис.3.4).

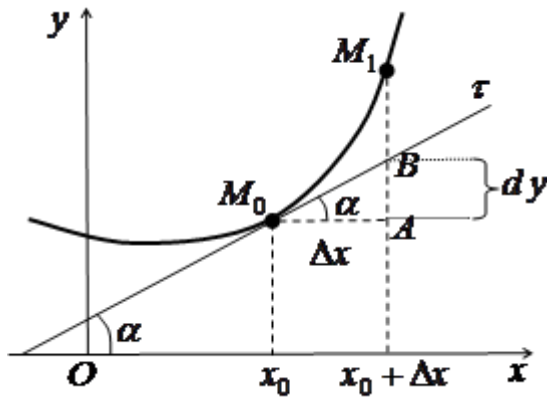


Рис. 3.4

Приклад

Наближено обчислити значення $\sin 28^\circ$.

Розв'язання. В даному випадку $f(x) = \sin x$, $f'(x) = \cos x$.

Покладемо $x_0 = \frac{\pi}{6}$, що відповідає 30° в градусній мірі;

$$\Delta x = x_1 - x_0 = \frac{\pi}{180} \cdot 28 - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{90}.$$

За формулою отримаємо:

$$\sin 28^{\circ} \approx \sin \frac{\pi}{6} + \cos \frac{\pi}{6} \cdot \left(-\frac{\pi}{90} \right) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\pi}{90} \approx 0,47,$$

тобто $\sin 28^{\circ} \approx 0,47$.

Для того, щоб оцінити абсолютну і відносну похибки, скористаємось більш точним значенням, отриманим за допомогою

калькулятора: $\sin 28^{\circ} \approx 0,469$. Тоді $\Delta \approx |0,469 - 0,47| = 0,001$, а відносна

похибка δ дорівнюватиме:

$$\delta \approx \frac{0,001}{0,469} \cdot 100\% \approx 0,2\%$$

Диференціал вищих порядків

Нехай функція $y = f(x)$ диференційована на проміжку X . Її диференціал $dy = f'(x) \cdot dx$ називається також *диференціалом першого порядку* і його можна розглядати як функцію змінної x (приріст аргументу dx вважається сталим).

Диференціалом другого порядку функції $y = f(x)$ в точці x називається диференціал від її диференціала першого порядку (за умови, що повторний приріст незалежної змінної x збігається з попереднім dx) і

$$\text{позначається } d^2 y : d^2 y \stackrel{\text{def}}{=} d(dy).$$

За означенням маємо

$$d^2 y \stackrel{\text{def}}{=} d(dy) = d(f'(x) \cdot dx) = (f'(x) \cdot dx)' \cdot dx = (f'(x))' \cdot dx \cdot dx = f''(x) \cdot (dx)^2,$$

позначають $(dx)^2 = dx^2$. Таким чином

$$d^2 y = f''(x) \cdot dx^2.$$

Аналогічно, диференціалом n -го порядку (позначається $d^n y$), $n=2,3,\dots$ називається диференціал від диференціала порядку $(n-1)$ за умови, що в диференціалах весь час беруться одні й ті самі прирости dx незалежної змінної x . Тобто $d^n y \stackrel{\text{def}}{=} d(d^{n-1} y)$.

При цьому справедлива формула:

$$d^n y = f^{(n)}(x) \cdot dx^n.$$

Приклад

Обчислити $d^2 y$, якщо $y = \ln(3x+1)$.

Розв'язання. Скористаємось формулою (3.16). Для цього знайдемо $y''(x)$

$$y'(x) = \frac{1}{3x+1} \cdot 3, \quad y''(x) = 3 \cdot \left(\frac{1}{3x+1} \right)' = \frac{-9}{(3x+1)^2}.$$

Отже
$$d^2 y = \frac{-9}{(3x+1)^2} dx^2.$$