

Тема 8. Неперервність функції в точці та на відрізьку. Точки розриву функції, їх класифікація

Мета: ознайомитись з поняттям неперервності функції, тогчками розриву

Кількість годин: 2

Вид контролю: письмове опитування

Між предметні зв'язки: бухгалтерський облік

Рекомендована література:

1. Вища математика для економістів. Конспект лекцій (І курс) / Уклад.: Ю. П. Буценко, О. О. Диховичний, О. А. Тимошенко. — К: НТУУ «КПІ», 2014. — 256с.
2. Вища математика: навч. посіб. для студ. вищ. навч. зак. / В.П Дубовик., П. Юрик. - 4-те вид. - К. : Ігнатекс-Україна., 2013. - 648 с: іл. - (Вища школа). - Бібліогр.: с. 632-633.
3. Математика для економістів. Елементи лінійної алгебри: Методичні вказівки та завдання для типових розрахунків / Уклад.: В.М. Долгіх, О.М. Назаренко. — Суми: УАБС НБУ, 2005. — 38 с.
4. Мельниченко О.П., Ревицька У.С. Вища математика: Збірник задач та методичні рекомендації для проведення практичних занять та самостійної роботи студентів денної форми навчання економічних спеціальностей. — Біла Церква.— 2010.— 83с.

План вивчення:

1. Написати стислий конспект (вказати номер, тему самостійної роботи) за наступним планом:
 - 1) Точки розриву та їх класифікація.
 - 2) Неперервність функції в точці та на проміжку.
 - 3) Властивості неперервних функцій.
2. Знати:
 - ✓ означення точки розриву;
 - ✓ означення усуваного розриву;
 - ✓ означення точки першого та другого розриву;
 - ✓ правила знаходження точок розриву;

- ✓ означення неперервної функції у точці;
- ✓ означення розривною в точці функції;
- ✓ означення неперервної функції на проміжку;
- ✓ властивості неперервної функції.

3. Розглянути приклади.

Завдання для самоперевірки:

1) Нехай дано функцію

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \geq 1 \\ x, & x < 1 \end{cases}$$

Дослідити цю функцію на неперервність у точці $x_0=1$.

2) При якому значенні a функція

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \leq \frac{\pi}{2}, \\ a - x, & x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

буде неперервною? Побудувати її графік.

3) Дослідити функцію на неперервність і побудувати схематично її графік.

а) $f(x) = \frac{2}{3x-1} + 1$

б) $f(x) = 5^{\frac{1}{x+3}}$.

Тема 8. Неперервність функції в точці та на відрізку. Точки розриву. Їх класифікації.

Точка розриву

Точка розриву - це така точка (значення аргументу) в якій функція не є неперервною.

Розрив називають **усувним**, якщо в даній точці існує **границя функції**, що не збігається з значенням функції.

Точку називають **точкою розриву першого роду**, якщо існують скінченні ліва та права границі в даній точці, та вони не збігаються.

Якщо хоча б одна одностороння границя не існує, чи нескінченна, то точку називають **точкою розриву другого роду**.

Класифікація точок розриву

1) Точка x_0 називається **точкою розриву першого роду** функції $y = f(x)$,

якщо існують скінчені односторонні границі справа $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = C_1 = const$

та зліва $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = C_2 = const$.

Якщо, крім того, виконується хоча б одна із умов

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) \neq f(a); \\ \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) \neq f(a); \\ \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a-0} f(x). \end{cases}$$

то функція в точці $x = a$ має **неусувний розрив першого роду**.

Якщо границі функції рівні проте функція не існує

$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow a-0} f(x) \neq f(a)$ то маємо **усувний розрив першого роду**.

2) Точка x_0 називається **точкою розриву другого роду функції** $y = f(x)$,

якщо границя справа $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x)$ або зліва $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x)$ не існує або нескінченна.

Стрибком функції в точці розриву $x = x_0$ називається різниця її

односторонніх границь $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x)$ якщо вони різні.

При знаходженні точок розриву функції можна керуватися наступними правилами:

- 1) елементарна функція може мати розрив тільки в окремих точках, але не може бути розривною на певному інтервалі.
- 2) елементарна функція може мати розрив в точці де вона не визначена за умови, що вона буде визначена хоча би з однієї сторони від цієї точки.
- 3) неелементарна функція може мати розриви як в точках, де вона невизначена, так і в тих, де вона визначена.

Наприклад, якщо функція задана кількома різними аналітичними виразами (формулами) для різних інтервалів, то на межі стику може бути розривною.

Неперервність функції в точці

Функція $f(x)$ називається неперервною в точці $x = a$, якщо:

- 1) вона визначена в цій точці;
- 2) існує границя функції в цій точці $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$
- 3) значення границі дорівнює значенню функції в точці $x = a$, тобто $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

Якщо одна із умов порушується, то функція називається **розривною в точці $x = a$** , сама точка $x = a$ називається **точкою розриву**. Усі елементарні функції є неперервними на інтервалах визначеності.

Приклад

Знайти точки розриву функції

а) $y = \frac{x}{x^2 - 1}$.

Розв'язання:

Функція визначена в усіх точках крім тих де знаменник перетворюється в нуль $x=1, x=-1$. Область визначення функції наступна

$$x \in (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; \infty).$$

Знайдемо односторонні границі в точках розриву

$$\lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{x}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{x}{(x-1)(x+1)} = +\infty;$$

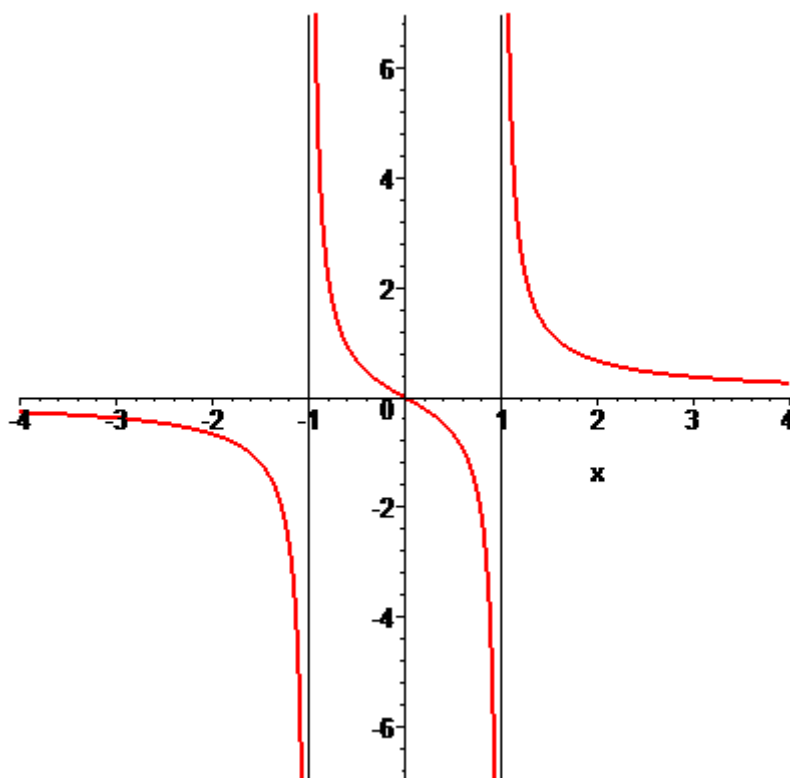
$$\lim_{x \rightarrow -1-0} \frac{x}{x^2 - 1} = -\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{x}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{x}{(x-1)(x+1)} = +\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x}{x^2 - 1} = -\infty.$$

При знаходженні односторонніх границь подібного вигляду достатньо переконатися в знаку функції та в тому, що знаменник прямує до нуля. В результаті отримаємо границю рівну безмежності або мінус безмежності.

Оскільки в точках $x=1, x=-1$ функція має нескінченні односторонні границі, то аргументи $x=1, x=-1$ є точками розриву II роду. Графік функції наведено на рисунку нижче



Неперервність функції на проміжку

Функція $y = f(x)$ називається *неперервною на проміжку*, якщо вона неперервна в кожній точці цього проміжку.

Теорема та доведення.

Теорема . Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ є неперервними в точці x_0 , тоді неперервними в цій точці будуть також функції:

$$1) y_1(x) = \alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x), \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R};$$

$$2) y_2(x) = f(x) \cdot g(x);$$

$$3) y_3(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \text{ за додаткової умови } g(x_0) \neq 0.$$

Доведення. Нехай функції $f(x)$, $g(x)$ - неперервні в точці x_0 . Тоді, за означенням 2.9, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g(x_0)$. Використаємо теореми про арифметичні операції над функціями, що мають границю:

$$1) \lim_{x \rightarrow x_0} y_1(x) = \alpha \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \beta \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \alpha \cdot f(x_0) + \beta \cdot g(x_0) = y_1(x_0);$$

$$2) \lim_{x \rightarrow x_0} y_2(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = f(x_0) \cdot g(x_0) = y_2(x_0);$$

$$3) \lim_{x \rightarrow x_0} y_3(x) = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)} = y_3(x_0).$$

Бачимо, що означення 2.9 виконується в кожному з цих випадків. Тобто ми показали, що при виконанні арифметичних дій над неперервними функціями ми знову отримаємо неперервні функції.

Властивості неперервних функцій

Теорема 1. Сума скінченного числа функцій, неперервних у точці a , є функція, неперервна в цій точці.

Теорема 2. Добуток скінченного числа функцій, неперервних у точці a , є функція, неперервна в цій точці.

Теорема 3. Відношення двох функцій, неперервних у точці a , є функція, неперервна в цій точці, якщо значення функції у знаменнику відмінне від нуля в точці