

Тема 7. Перша і друга важливі границі. Нескінченно малі і нескінченно великі функції

Мета: ознайомитись з нескінченно малими та нескінченно великими функціями, першою та другою важливими границями

Кількість годин: 2

Вид контролю: письмове опитування

Між предметні зв'язки: бухгалтерський облік

Рекомендована література:

1. Вища математика для економістів. Конспект лекцій (І курс) / Уклад.: Ю. П. Буценко, О. О. Диховичний, О. А. Тимошенко. — К: НТУУ «КПІ», 2014. — 256с.
2. Вища математика: навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. / В.П. Дубовик., П. Юрик. - 4-те вид. - К. : Ігнатекс-Україна., 2013. - 648 с: іл. - (Вища школа). - Бібліогр.: с. 632-633.
3. Математика для економістів. Елементи лінійної алгебри: Методичні вказівки та завдання для типових розрахунків / Уклад.: В.М. Долгих, О.М. Назаренко. — Суми: УАБС НБУ, 2005. — 38 с.
4. Мельниченко О.П., Ревецька У.С. Вища математика: Збірник задач та методичні рекомендації для проведення практичних занять та самостійної роботи студентів денної форми навчання економічних спеціальностей. — Біла Церква.— 2010.— 83с.

План вивчення:

1. Написати стислий конспект (вказати номер, тему самостійної роботи) за наступним планом:
 - 1) Перша і друга важливі границі.
 - 2) Теореми про нескінченно малі функції та їх доведення.
 - 3) Нескінченно великі функції.
2. Знати:
 - ✓ суть першої та другої важливої границі;
 - ✓ означення нескінченно малої функції;
 - ✓ означення нескінченно великої функції

3. Розглянути приклади.

Завдання для самоперевірки:

1) Обчислити: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{x}$

2) Обчислити: $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\pi - 2x) \operatorname{tg} x$

3) Обчислити: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-3}{n}\right)^n$

Тема 7. Перша и друга важливі границі. Нескінченно малі і нескінченно великі функції.

Перша і друга важливі границі.

Приклади границь, що містять невизначеності виду нуль на нуль $\frac{0}{0}$ часто зустрічаються у тригонометричних функціях. Для їх розкриття використовують **першу чудову (особливу) границю**, суть якої полягає в тому, що границя відношення синус функції до аргументу, коли той прямує до нуля рівна одиниці

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

На її основі можна отримати ряд корисних для практики особливих границь

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(kx)}{x} = k, k \neq 0$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1,$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin(x)}{x} = 1.$$

Друга особлива границя дозволяє розкривати невизначеності виду 1^∞ .

Коротко вона має наступний запис

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e,$$

де $e = 2,718281828459045...$ — експонента.

На основі другої особливої границі отримують наступні границі

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e,$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^x = e^k.$$

Приклад

Знайти границі.

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\alpha x)}{\sin(\beta x)}.$

2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x + \arctan(2x)}{4x - \arcsin(x)}.$

3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin(2x)}{\sqrt{3+x} - \sqrt{3}}.$

4) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^{mx}.$

5) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x+2}\right)^{\frac{x+1}{2}}.$

6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(7x) \cos(3x)}{5x}.$

7) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{7x}\right)^{5x}.$

Розв'язок.

1) Помножимо чисельник і знаменник на аргумент та зведемо до першої чудової границі

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\alpha x)}{\sin(\beta x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha \sin(\alpha x)}{\alpha x} \cdot \frac{\beta x}{\beta \sin(\beta x)} = \\ &= \alpha \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\alpha x)}{\alpha x} \cdot \frac{1}{\beta} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\beta x}{\sin(\beta x)} = \frac{\alpha}{\beta}. \end{aligned}$$

2) Поділимо чисельник і знаменник на x

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 + 2 \frac{\arctan(2x)}{2x}}{4 - \frac{\arcsin(x)}{x}} = \frac{3+2}{4-1} = \frac{5}{3}.$$

3) Згідно розвинення кореня в околі одиниці

$$(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x, x \rightarrow 0$$

знаменник можна перетворити наступним чином

$$\sqrt{3+x} - \sqrt{3} = \sqrt{3} \left(\sqrt{1 + \frac{x}{3}} - 1 \right) \approx \sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{3} = \frac{\sqrt{3}x}{6}.$$

На основі цього знаходимо границю

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin(2x)}{\sqrt{3+x} - \sqrt{3}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6 \cdot 2 \cdot \arcsin(2x)}{\sqrt{3} \cdot 2x} = \frac{6 \cdot 2}{\sqrt{3}} = 4\sqrt{3}.$$

4) Зведемо до другої визначної границі

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{k}{x} \right)^{mx} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{k}{x} \right)^{\frac{x}{k} \cdot k \cdot m} = e^{km}.$$

5) Зведемо до правильного дробу вираз в дужках

$$\frac{x-1}{x+2} = 1 - \frac{3}{x+2}$$

та підставимо в границю

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{x+2} \right)^{\frac{x+1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{x+2} \right)^{\frac{x+2}{2}} \times \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{x+2} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Обчислимо перший множник

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{x+2} \right)^{\frac{x+2}{2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{x+2} \right)^{\frac{x+2}{(-3)^2} \cdot (-3)} = e^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e^3}}.$$

Друга границя рівна одиниці

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{x+2} \right)^{\frac{1}{2}} = 1.$$

Остаточно отримаємо

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x+2} \right)^{\frac{x+1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e^3}}.$$

6) Зведемо до першої визначної границі

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(7x) \cos(3x)}{5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(7x)}{7x} \cdot \frac{7x \cdot \cos(3x)}{5x} = 1 \cdot \frac{7}{5} \lim_{x \rightarrow 0} \cos(3x) = \frac{7}{5}.$$

7) Перетворимо показник для застосування другої визначної границі

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{7x} \right)^{5x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{7x} \right)^{\frac{7 \times 5 \cdot 3}{37}} = e^{\frac{5 \cdot 3}{7}} = e^{\frac{15}{7}} = e^2 \sqrt[7]{e}.$$

Нескінченно малі функції

Послідовність $\{x_n\}$ називається нескінченно малою, якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

Функція $f(x)$ називається нескінченно малою функцією в точці $x = a$ (або при $x \rightarrow a$), якщо $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$.

Аналогічні означення н. м. при $x \rightarrow a - 0$, $x \rightarrow a + 0$, $x \rightarrow \infty$,
 $x \rightarrow a$, $x \rightarrow -\infty$, $x \rightarrow +\infty$.

Теорема та доведення.

Теорема 1. Якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, то $\alpha_n = x_n - a$ є нескінченно малою.

Доведення. За означенням границі послідовності маємо:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon), \quad \forall n > N: |x_n - a| < \varepsilon.$$

Оскільки $\alpha_n = x_n - a$, то

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon), \quad \forall n > N: |\alpha_n| < \varepsilon.$$

Це означає, що $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$ і α_n – нескінченно мала.

Теорема 2. Якщо $\alpha_n = x_n - a$ – нескінченно мала, то $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

Доведення. Оскільки α_n – нескінченно мала, то за означенням маємо:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon), \quad \forall n > N: |\alpha_n| < \varepsilon,$$

Або $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon), \quad \forall n > N: |x_n - a| < \varepsilon$

Згідно з означенням границі числової послідовності одержуємо,

що $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.

Теорема 3. Алгебраїчна сума (добуток) скінченного числа нескінченно малих послідовностей є нескінченно малою.

Доведення. Доведемо теорему, наприклад, для випадку суми двох нескінченно малих послідовностей $\{x_n\}$ та $\{y_n\}$. Маємо:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 \leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \left(\frac{\varepsilon}{2} \right) \exists N_1 = N_1 \left(\frac{\varepsilon}{2} \right), \quad \forall n > N_1: |x_n| < \frac{\varepsilon}{2};$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0 \leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \left(\frac{\varepsilon}{2} \right) \exists N_2 = N_2 \left(\frac{\varepsilon}{2} \right), \quad \forall n > N_2: |y_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

За $N(\varepsilon)$ оберемо $\max\{N_1, N_2\}$ та оцінимо модуль $|x_n + y_n|$:

$$|x_n + y_n| \leq |x_n| + |y_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Таким чином,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon), \quad \forall n > N: |x_n + y_n| < \varepsilon \leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = 0.$$

Теорема 4. Добуток нескінченно малої послідовності на послідовність обмежену є нескінченно малою послідовністю.

Доведення. Нехай $\{x_n\}$ – обмежена послідовність, тоді існує таке число M , що для всіх номерів n виконується нерівність $|x_n| \leq M$.

$$\text{Якщо } \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0, \text{ то } \forall \varepsilon > 0 \left(\frac{\varepsilon}{M} \right) \exists N = N \left(\frac{\varepsilon}{M} \right), \quad \forall n > N: |y_n| < \frac{\varepsilon}{M}.$$

Оцінимо модуль $|x_n \cdot y_n|$, маємо:

$$|x_n \cdot y_n| = |x_n| \cdot |y_n| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon.$$

Таким чином,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N = N(\varepsilon), \quad \forall n > N: |x_n \cdot y_n| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot y_n = 0.$$

Зауваження. Частка від ділення нескінченно малої послідовності на послідовність, яка має відмінну від нуля границю, є величина нескінченно мала.

Нескінченно великі функції

Послідовність $\{x_n\}$ називається нескінченно великою, якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$, тобто, $\forall M > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \quad |x_n| > M$, де M – як завгодно велике додатне число.

Функція $f(x)$ називається *нескінченно великою* функцією в точці $x = a$ (або при $x \rightarrow a$), якщо:

$$\forall M > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x: 0 < |x - a| < \delta(M) \Rightarrow |f(x)| > M.$$

Символічно це записують так: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$

Якщо ж виконується нерівність $f(x) > M$ ($f(x) < -M$), то пишуть

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty \quad \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty \right).$$

Аналогічно визначаються границі: $\lim_{x \rightarrow a \pm 0} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow a \pm 0} f(x) = -\infty$

Теорема та доведення.

Теорема 1.

- 1) Алгебраїчна сума нескінченно великих послідовностей (функцій) одного знака є нескінченно великою;
- 2) добуток нескінченно великих послідовностей (функцій) є нескінченно великим.

Теорема 2.

- 1) Якщо $\{x_n\}$ – нескінченно велика послідовність, то

послідовність $\{\alpha_n\} = \left\{ \frac{1}{x_n} \right\}$ є нескінченно малою;

- 2) Якщо $\{x_n\}$ – нескінченно мала послідовність, то

послідовність $\{\alpha_n\} = \left\{ \frac{1}{x_n} \right\}$ є нескінченно великою.

Доведення. 1) Якщо $\{x_n\}$ – нескінченно велика послідовність, то

$$\forall M > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \quad |x_n| > M.$$

Тоді $\left| \frac{1}{x_n} \right| < \frac{1}{M}$. Оскільки M – як завгодно велике додатне число, то

число $\varepsilon = \frac{1}{M}$ є як завгодно малим, тому

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \quad \left| \frac{1}{x_n} \right| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0.$$

- 2) Якщо $\{x_n\}$ – нескінченно мала послідовність, то

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \quad |x_n| < \varepsilon.$$

Тоді $\left| \frac{1}{x_n} \right| > \frac{1}{\varepsilon}$. Оскільки ε – як завгодно мале додатне число, то число $M = \frac{1}{\varepsilon}$ є як завгодно великим, тому

$$\forall M > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \quad \left| \frac{1}{x_n} \right| > M \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \infty$$