

Тема 5. Скалярний, векторний, мішаний добуток векторів, їх геометричний зміст, властивості та застосування

Мета: ознайомитись з поняттям скалярний, векторний, мішаний добуток векторів, його властивостями та застосуванням

Кількість годин: 3

Вид контролю: письмове опитування

Між предметні зв'язки: туристичне краєзнавство

Рекомендована література:

1. Вища математика для економістів. Конспект лекцій (І курс) / Уклад.: Ю. П. Буценко, О. О. Диховичний, О. А. Тимошенко. — К: НТУУ «КПІ», 2014. — 256 с.
2. Вища математика: навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. / В.П. Дубовик., П. Юрик. - 4-те вид. - К. : Ігнатекс-Україна., 2013. - 648 с: іл. - (Вища школа). - Бібліогр.: с. 632-633.
3. Математика для економістів. Елементи лінійної алгебри: Методичні вказівки та завдання для типових розрахунків / Уклад.: В.М. Долгих, О.М. Назаренко. — Суми: УАБС НБУ, 2005. — 38 с.
4. Мельниченко О.П., Ревіцька У.С. Вища математика: Збірник задач та методичні рекомендації для проведення практичних занять та самостійної роботи студентів денної форми навчання економічних спеціальностей. — Біла Церква.— 2010.— 83с.

План вивчення:

1. Написати стислий конспект (вказати номер, тему самостійної роботи) за наступним планом:
 - 1) Скалярний добуток векторів, його властивості і застосування.
 - 2) Векторний добуток векторів, його властивості і застосування.
 - 3) Властивості та застосування мішаного добутку векторів.
2. Знати:
 - ✓ означення мішаного добутку векторів;
 - ✓ властивості мішаного добутку векторів;

- ✓ означення скалярного добутку векторів;
- ✓ властивості скалярного добутку векторів;
- ✓ означення векторного добутку векторів;
- ✓ властивості векторного добутку векторів.

3. Розглянути приклади.

Завдання для самоперевірки:

1) Знайти $(5\vec{a} + 3\vec{b})(2\vec{a} - \vec{b})$, якщо $|\vec{a}|=2, |\vec{b}|=3, \vec{a} \perp \vec{b}$.

2) З'ясувати лінійну залежність векторів

а) $\vec{a} = (1; 2; 3); \vec{b} = (4; 5; 6); \vec{c} = (7; 8; 9);$

б) $\vec{a} = (2; 1; 2); \vec{b} = (1; 2; 2); \vec{c} = (2; 2; 1);$

в) $\vec{a} = (1; 7; 1); \vec{b} = (8; 1; 8); \vec{c} = (1; 2; 1).$

Тема 5. Скалярний, мішаний, векторний добуток векторів. Їх геометричний зміст. Властивості та застосування.

Мішаний добуток векторів

Мішаним добутком трьох векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ називається число, яке рівне векторному добутку перших двох векторів $\vec{a} \times \vec{b}$, помноженому скалярно на вектор $\vec{c}$. Векторно це можна подати так $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$

Так як вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ на практиці задають в координатній формі, то їх мішаний добуток рівний визначникові, побудованому на їх координатах

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

В силу того, що векторний добуток антикомутативний, а скалярний добуток комутативний, то циклічна перестановка векторів в мішаному добутку не змінює його значення. Перестановка двох сусідніх векторів змінює знак на протилежний

$$\begin{aligned} (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} &= (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a} = (\vec{c} \times \vec{a}) \cdot \vec{b} = \\ &= -(\vec{b} \times \vec{a}) \cdot \vec{c} = -(\vec{c} \times \vec{b}) \cdot \vec{a} = -(\vec{a} \times \vec{c}) \cdot \vec{b}. \end{aligned}$$

Мішаний добуток векторів додатній, якщо вони утворюють праву трійку та від'ємний – якщо ліву.

Властивості

1. Об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ рівний модулю мішаного добутку цих векторів

$$V = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|.$$

2. Об'єм чотирикутної піраміди рівний третині модуля мішаного добутку

$$V = \frac{1}{3} |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|.$$

3. Об'єм трикутної піраміди рівний одній шостій модуля мішаного добутку

$$V = \frac{1}{6} |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|.$$

4. Вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарні тоді і лише тоді, коли

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = 0.$$

В координатах умова компланарності означає рівність нулю [визначника](#)

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0.$$

Приклад

Визначити, якою трійкою (правою чи лівою) є вектори

1) $\vec{a} = (1; -1; 2); \vec{b} = (-2; 1; 1); \vec{c} = (1; -2; 2);$

2) $\vec{a} = (1; 2; 1); \vec{b} = (2; 1; 1); \vec{c} = (1; 1; 2);$

3) $\vec{a} = (3; -2; -1); \vec{b} = (2; -3; 1); \vec{c} = (1; -2; -3);$

Розв'язок.

Знайдемо мішаний добуток і за знаком з'ясуємо, яку трійку векторів вони утворюють

1) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} =$

$= 2 \cdot 1 + 8 \cdot 2 - 4 + 2 = 5$. Вектори утворюють праву трійку ($5 > 0$).

$$2) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} =$$

$= 2 \cdot 1 + 8 \cdot 2 - 4 + 2 = 5$. Вектори утворюють праву трійку ($5 > 0$).

$$3) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$= 2 + 2 + 2 - 1 - 8 - 1 = -4$. Вектори утворюють ліву трійку ($-4 < 0$).

Скалярний добуток

I. Сумою двох n -вимірних векторів

$\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ і $\vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ називають n -вимірний вектор $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, координати якого дорівнюють сумі відповідних координат векторів - доданків, тобто $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)$.

Для прикладу, якщо $\vec{a} = (3; -5; -2)$, $\vec{b} = (2; -1; -3)$,

$$\text{то } \vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = (3 + 2; -5 - 1; -2 - 3) = (5; -6; -5).$$

З цього правила випливає, що різницею двох векторів буде вектор, координати якого є різницею відповідних координат векторів.

$$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b} = (3 - 2; -5 - (-1); -2 - (-3)) = (1; -4; 1).$$

II. Добутком числа k (скаляра) на n -вимірний вектор $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ називається n -вимірний вектор $k\vec{a}$, координати якого дорівнюють добутку числа k на відповідні координати вектора $\vec{a}$, тобто $k\vec{a} = (ka_1, ka_2, \dots, ka_n)$.

Для прикладу, $5\vec{a} = (5 \cdot 3; 5 \cdot (-5); 5 \cdot (-2)) = (15; -25; -10)$.

Властивості

$$1) \bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a};$$

$$2) (\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} = \bar{a} + (\bar{b} + \bar{c});$$

$$3) k \cdot (\bar{a}l) = (kl) \cdot \bar{a};$$

$$4) k \cdot (\bar{a} + \bar{b}) = k\bar{a} + k\bar{b};$$

$$5) (k + l) \bar{a} = k\bar{a} + l\bar{a};$$

$$6) \bar{a} + \bar{0} = \bar{a};$$

7) Для довільного вектора $\bar{a}$ існує протилежний вектор $-\bar{a}$ такий, що $\bar{a} + (-\bar{a}) = \bar{0}$.

III. Скалярним добутком $(\bar{a}, \bar{b})$ двох n -вимірних векторів $\bar{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ і $\bar{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ називають число, що дорівнює сумі добутків відповідних координат векторів, тобто $(\bar{a}, \bar{b}) = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \dots + a_n \cdot b_n$

Для прикладу, якщо $\bar{a} = (-5; 7; 2)$; $\bar{b} = (2; -3; 4)$, то

$$(\bar{a}, \bar{b}) = -5 \cdot 2 + 7 \cdot (-3) + 2 \cdot 4 = -27.$$

Згідно іншого означення, скалярний добуток двох векторів це число, яке рівне добутку довжин векторів (їх модулів) на косинус кута між ними

$$(\bar{a}, \bar{b}) = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cos(\varphi), \quad (0 \leq \varphi \leq \pi).$$

З наведеного вище означення можна отримати формулу для обчислення кута між векторами

$$\cos(\varphi) = \frac{(\bar{a}, \bar{b})}{|\bar{a}| \cdot |\bar{b}|}, \quad (0 \leq \varphi \leq \pi)$$

Векторний добуток

I. Векторним добутком $\vec{a} \times \vec{b}$ або $[\vec{a}, \vec{b}]$ двох векторів називається вектор $\vec{c}$ який відповідає наступним умовам:

1) модуль вектора $\vec{c}$ рівний добутку модулів векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ на синус кута між ними $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\varphi)$;

2) вектор $\vec{c}$ нормальний до площини, побудованої на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

3) вектор $\vec{c}$ напрямлений так, що з його кінця найкоротший поворот від вектора $\vec{a}$ до $\vec{b}$ відбувається проти руху годинникової стрілки. Іншими словами, вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ утворюють праву трійку.

Властивості

Його модуль рівний площі паралелограма побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$

$$S = \vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot |\sin(\varphi)|.$$

Тому площа трикутника, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$ рівна модулю половини векторного добутку цих векторів

$$S = \frac{1}{2} |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot |\sin(\varphi)|.$$

Приклад

Задано вектори $\vec{a} = (3; 5; 7)$ та $\vec{b} = (-1; 2; 3)$

Знайти наступні величини

1) суму векторів $2\vec{a} + 5\vec{b}$, $3\vec{a} - 2\vec{b}$;

2) скалярний добуток векторів $(\vec{a}, \vec{b})$;

3) векторний добуток $\vec{a} \times \vec{b}$; площу трикутника побудованого на векторах $\vec{a}, \vec{b}$;

Розв'язок.

1) Проведемо обчислення

$$2\vec{a} + 5\vec{b} = (2 \cdot 3 + 5 \cdot (-1); 2 \cdot 5 + 5 \cdot 2; 2 \cdot 7 + 5 \cdot 3) = (1; 20; 29),$$

$$3\vec{a} - 2\vec{b} = (3 \cdot 3 - 2 \cdot (-1); 3 \cdot 5 - 2 \cdot 2; 3 \cdot 7 - 2 \cdot 3) = (8; 11; 15).$$

2) Скалярний добуток буде рівний

$$(\vec{a}, \vec{b}) = 3 \cdot (-1) + 5 \cdot 2 + 7 \cdot 3 = 28.$$

3) Векторний добуток обчислюємо згідно формули

$$\begin{aligned}\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 5 & 7 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \\ &= (5 \cdot 3 - 7 \cdot 2)\vec{i} + (7 \cdot (-1) - 3 \cdot 3)\vec{j} + (3 \cdot 2 - 5 \cdot (-1))\vec{k} = \\ &= 1\vec{i} - 13\vec{j} + 11\vec{k}.\end{aligned}$$

Площа трикутника буде рівна

$$S = \frac{1}{2}|\vec{c}| = \frac{1}{2}\sqrt{1^2 + (-13)^2 + 11^2} = \frac{1}{2}\sqrt{291} \approx 8,53.$$

