

Тема 4. Лінійно залежні і незалежні системи векторів. Базис, розкладання вектора за базисом. Проекція вектора на вісь

Мета: розширити знання про системи векторів, ознайомитись з поняттям лінійно залежних та незалежних векторів, базисом та проекцією вектора на вісь

Кількість годин: 2

Вид контролю: письмове опитування

Між предметні зв'язки: туристичне краєзнавство, інформаційні системи в туризмі

Рекомендована література:

1. Вища математика для економістів. Конспект лекцій (І курс) / Уклад.: Ю. П. Буценко, О. О. Диховичний, О. А. Тимошенко. — К: НТУУ «КПІ», 2014. — 256 с.
2. Вища математика: навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. / В.П Дубовик., П. Юрик. - 4-те вид. - К. : Ігнатекс-Україна., 2013. - 648 с: іл. - (Вища школа). - Бібліогр.: с. 632-633.
3. Математика для економістів. Елементи лінійної алгебри: Методичні вказівки та завдання для типових розрахунків / Уклад.: В.М. Долгіх, О.М. Назаренко. — Суми: УАБС НБУ, 2005. — 38 с.
4. Мельниченко О.П., Ревецька У.С. Вища математика: Збірник задач та методичні рекомендації для проведення практичних занять та самостійної роботи студентів денної форми навчання економічних спеціальностей. — Біла Церква.— 2010.— 83с.

План вивчення:

1. Написати стислий конспект (вказати номер, тему самостійної роботи) за наступним планом:
 - 1) Означення та основні поняття.
 - 2) Проекція вектора на вісь.
 - 3) Алгоритм розкладу вектора за базисом.
2. Знати:
 - ✓ означення лінійно залежних і лінійно незалежних векторів;

- ✓ алгоритм розкладу вектора за базисом;
- ✓ формулу для обчислення проекції на вісь.

3. Розглянути приклади.

Завдання для самоперевірки:

- 1) Перевірити, чи утворюють вектори $a_1 (3; 5)$, $a_2 (4; 2)$ базис на площині.
- 2) Показати, що вектори $a_1 (3; 1; 5)$, $a_2 (3; 2; 8)$, $a_3 (0; 1; 2)$, $b (-3; 1; 2)$ утворюють базис тривимірного векторного простору, та розкласти вектор b за цим базисом (при розв'язуванні системи лінійних алгебраїчних рівнянь використати метод Крамера).

Тема 4. Лінійно залежні і незалежні системи векторів. Базис, розкладання вектора за базисом.

Проекція вектора на вісь.

Вектори бувають лінійно залежними або незалежними. Ці властивості визначають на основі наступних правил:

- 1) Вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ називаються **лінійно залежними**, якщо знайдуться такі дійсні числа $k_1, k_2, \dots, k_n$, одночасно не рівні нулю, при яких справджується рівність $k_1 \vec{a}_1 + k_2 \vec{a}_2 + \dots + k_n \vec{a}_n = 0$
- 2) Якщо рівність $k_1 \vec{a}_1 + k_2 \vec{a}_2 + \dots + k_n \vec{a}_n = 0$ виконується лише за умови, що $k_1 = k_2 = \dots = k_n$ то вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ називаються **лінійно незалежними**.

На практиці лінійну незалежність векторів перевіряють із умови, що визначник складений із координат векторів відмінний від нуля. Для прикладу, якщо маємо три вектори з простору $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, то для підтвердження їх лінійної незалежності визначник

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$$

не має бути рівний нулю. В іншому випадку вектори будуть лінійно залежними.

З властивостей визначників випливає, що вектори $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ будуть лінійно залежні тоді і тільки тоді, коли хоча б один з них є лінійною комбінацією інших.

Алгоритм розкладу вектора за базисом

1. Записати рівність $\bar{x} = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + \dots + x_n\bar{e}_n$ у матричній формі.

Вектори $\bar{x}, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$ подати у вигляді матриць-стовпців.

2. Матричне рівняння записати у вигляді системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Розв'язати одержану систему.

3. Записати розклад вектора $\bar{x}$ за базисом $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \dots, \bar{e}_n$. Для цього в рівність $\bar{x} = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + \dots + x_n\bar{e}_n$ замість $x_1, x_2, \dots, x_n$ підставити розв'язки системи рівнянь

Приклад

Записати розклад вектора $\bar{x} = (7; 5; -8)$ за базисом

$$\bar{e}_1 = (2; 3; -5), \bar{e}_2 = (5; -7; 9), \bar{e}_3 = (-4; 3; -2).$$

Розв'язок.

Скористаємося формулою розкладу вектора

$$x_1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -7 \\ 9 \end{pmatrix} + x_3 \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ -8 \end{pmatrix}.$$

Дане рівняння запишемо у вигляді системи лінійних рівнянь

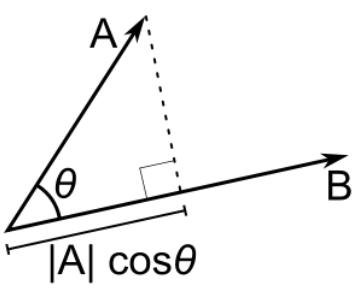
$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 7; \\ 3x_1 - 7x_2 + 3x_3 = 5; \\ -5x_1 + 9x_2 - 2x_3 = -8. \end{cases}$$

Розв'язком цієї системи $x_1 = 3, x_2 = 1, x_3 = 1$.

Отримані значення підставляємо в рівняння розкладу, в результаті отримаємо $\bar{x} = 3\bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_3$ - розклад вектора $\bar{x}$ в базисі $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$.

Проекція на вісь

Проекцією вектора **A** на інший вектор **B** є [вектор](#), що обчислюється за формулою

$$\text{proj}_{\mathbf{B}}(\mathbf{A}) = \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{|\mathbf{B}|^2} \mathbf{B}.$$


The diagram shows two vectors, $\mathbf{A}$ and $\mathbf{B}$, originating from the same point. Vector $\mathbf{A}$ is at an angle θ to vector $\mathbf{B}$. A dashed line is drawn from the tip of $\mathbf{A}$ perpendicular to $\mathbf{B}$, forming a right angle. The segment of $\mathbf{B}$ from the origin to the foot of this perpendicular is labeled $|A| \cos \theta$, representing the scalar projection of $\mathbf{A}$ onto $\mathbf{B}$.