

Тема 3. Еквівалентні перетворення. Розв'язування систем лінійних рівнянь методом Гауса

Мета: ознайомитись з поняттям еквівалентні перетворення матриці, системою лінійних алгебраїчних рівнянь, одним із методів розв'язування систем

Кількість годин: 2

Вид контролю: письмове опитування

Між предметні зв'язки: бухгалтерський облік

Рекомендована література:

1. Вища математика для економістів. Конспект лекцій (І курс) / Уклад.: Ю. П. Буценко, О. О. Диховичний, О. А. Тимошенко. — К: НТУУ «КПІ», 2014. — 256 с.
2. Вища математика: навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. / В.П Дубовик., П. Юрик. - 4-те вид. - К. : Ігнатекс-Україна., 2013. - 648 с: іл. - (Вища школа). - Бібліогр.: с. 632-633.
3. Математика для економістів. Елементи лінійної алгебри: Методичні вказівки та завдання для типових розрахунків / Уклад.: В.М. Долгих, О.М. Назаренко. — Суми: УАБС НБУ, 2005. — 38 с.
4. Мельниченко О.П., Ревецька У.С. Вища математика: Збірник задач та методичні рекомендації для проведення практичних занять та самостійної роботи студентів денної форми навчання економічних спеціальностей. — Біла Церква.— 2010.— 83с.

План вивчення:

1. Написати стислий конспект (вказати номер, тему самостійної роботи) за наступним планом:
 - 1) Елементарні перетворення матриці означення та основні поняття.
 - 2) Використання методу Гаусса при розв'язуванні систем лінійних алгебраїчних рівнянь.
2. Знати:
 - ✓ означення елементарних перетворень матриці;
 - ✓ означення розширеної матриці системи;
 - ✓ суть методу Гауса розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь;

✓ суть прямого та оберного ходу методу Гауса.

3. Розглянути приклади знаходження оберненої матриці.

Завдання для самоперевірки:

1) Розв'язати систему трьох лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ -3x_2 + x_3 = 18, \\ x_3 = 3. \end{cases}$$

2) Розв'язати систему чотирьох лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гаусса.

$$\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 8x_4 = 1; \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0; \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + 4x_4 = 0; \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 3. \end{cases}$$

**Тема 3. Еквівалентні перетворення.
Розв'язування систем лінійних
рівнянь методом Гауса.**

Тема 3. Еквівалентні перетворення.

Розв'язування систем лінійних рівнянь методом Гауса.

Елементарні перетворення матриці — перетворення матриці, в результаті яких зберігається еквівалентність матриць. Таким чином, елементарні перетворення не змінюють множину розв'язків системи лінійних алгебраїчних рівнянь, яку представляє ця матриця.

Означення елементарних перетворень матриці

Нехай задана матриця A , що складається з m рядків та n стовпців:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Елементарними перетвореннями називаються такі перетворення:

- множення рядка (стовпця) матриці на число.
- додавання до рядка (стовпця) інший рядок (стовпець), помножений на довільне число.

Дані перетворення також називаються елементарними перетвореннями рядків. Аналогічно визначаються елементарні перетворення стовпців.

Система лінійних рівнянь методом Гауса

Метод Гауса розв'язування системи лінійних алгебраїчних рівнянь полягає в **послідовному виключенні змінних** і перетворенні системи рівнянь

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

до трикутного вигляду

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \dots + c_{1n}x_n = d_1; \\ c_{22}x_2 + \dots + c_{2n}x_n = d_2; \\ \dots \dots \dots \\ c_{nn}x_n = d_n, \quad c_{kk} = 1, (k = 1, 2, \dots, n). \end{cases}$$

Припустимо, що в системі коефіцієнт $\alpha_{11} \neq 0$. Якщо ця умова не виконується, то на перше місце переносимо рівняння, яке її задовільняє.

За допомогою першого рівняння виключимо x_1 із решти рівнянь.

Для цього ділять перший рядок на a_{11} , позначимо

$$\alpha_{1k}^1 = \frac{\alpha_{1k}}{\alpha_{11}}, \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n).$$

Далі від другого рядка віднімаємо перший рядок, помножений на a_{21} ; від третього перший рядок, помножений на a_{31} ; і так далі до останнього рядка.

Дістанемо таблицю коефіцієнтів:

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & \dots & x_n & 1 \\ a_{11}^1 & a_{12}^1 & \dots & a_{1n}^1 & b_1^1 \\ 0 & a_{22}^1 & \dots & a_{2n}^1 & b_2^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n2}^1 & \dots & a_{nn}^1 & b_n^1 \end{array}$$

Для невідомих $x_2, \dots, x_n$ маємо систему $n - 1$ рівнянь. Виконуючи, як і раніше, виключимо x_2 з усіх рівнянь, починаючи з третього. Для цього спочатку поділимо другий рядок на a_{22}^1 .

Якщо коефіцієнт $\alpha_{22}^1 = 0$, то переставимо рівняння так, щоб виконувалася умова $\alpha_{22}^1 \neq 0$.

Позначивши

$$a_{2k}^2 = \frac{a_{2k}^1}{a_{22}^1}, \quad (k = 2, \dots, n), \quad b_2^2 = \frac{b_2^1}{a_{22}^1},$$

від третього рядка віднімемо другий рядок, помножений на a_{32}^1 ;

Якщо система рівнянь з n невідомими має єдиний розв'язок, то ця система завжди може бути перетворена до трикутного вигляду. Для студентів не

завжди вимагають, щоб діагональні елементи були рівні одиниці. Достатньо просто звести систему лінійних рівнянь до верхньої трикутної.

Приклад

Дано систему трьох лінійних алгебраїчних рівнянь з трьома невідомими.

Розв'язати систему методом Гауса.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0; \\ 2x_1 - 4x_2 + x_3 = 3; \\ x_1 - x_2 - x_3 = -4. \end{cases}$$

Розв'язок.

Виключимо невідому x_1 з другого і третього рівняння. Для цього від них віднімемо перше помножене на 2;1:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0; \\ -6x_2 + 3x_3 = 3; \\ -2x_2 = -4. \end{cases}$$

Бачимо, що наше рівняння в такому вигляді можна розв'язувати оберненим ходом методу Гауса. Для цього з останнього рівняння виразимо x_2

$$x_2 = \frac{-4}{-2} = 2.$$

Підставимо отримане значення в попереднє рівняння і знайдемо x_3

$$3x_3 = 3 + 6x_2 = 3 + 6 \cdot 2 = 15 \rightarrow x_3 = 5.$$

З першого рівняння знаходимо x_1

$$x_1 = -x_2 + x_3 = -2 + 5 = 3.$$

Розв'язок даної системи рівний $x_1 = 3; x_2 = 2; x_3 = 5$.

У випадках систем великих розмірів, а також для зручності, часто на практиці використовують іншу схему розв'язування. Замість перетворень над системою виконують відповідні перетворення над матрицею, складеною з коефіцієнтів при невідомих і стовпця з вільних членів, який для зручності виокремлюють вертикальною лінією. Таку матрицю $\tilde{A}$ називають **розширеною матрицею системи**.