

Тема 2. Ранг матриці. Теорема про сумісність систем рівнянь першого степеня (теорема Кронекера-Капеллі)

Мета: ознайомитись з поняттям ранг матриці та його властивостями, теоремами про сумісність рівнянь першого степеня

Кількість годин: 2

Вид контролю: письмове опитування

Між предметні зв'язки: бухгалтерський облік

Рекомендована література:

1. Вища математика для економістів. Конспект лекцій (І курс) / Уклад.: Ю. П. Буценко, О. О. Диховичний, О. А. Тимошенко. — К: НТУУ «КПІ», 2014. — 256 с.
2. Вища математика: навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. / В.П. Дубовик., П. Юрик. - 4-те вид. - К. : Ігнатекс-Україна., 2013. - 648 с: іл. - (Вища школа). - Бібліогр.: с. 632-633.
3. Математика для економістів. Елементи лінійної алгебри: Методичні вказівки та завдання для типових розрахунків / Уклад.: В.М. Долгих, О.М. Назаренко. — Суми: УАБС НБУ, 2005. — 38 с.
4. Мельниченко О.П., Ревіцька У.С. Вища математика: Збірник задач та методичні рекомендації для проведення практичних занять та самостійної роботи студентів денної форми навчання економічних спеціальностей. — Біла Церква.— 2010.— 83с.

План вивчення:

1. Написати стислий конспект (вказати номер, тему самостійної роботи) за наступним планом:
 - 1) Означення рангу матриці та основні властивості. Теорема Кронекера-Капеллі
 - 2) Елементарні перетворення
 - 3) Означення рангу матриці та основні властивості. Теорема Кронекера-Капеллі

2. Знати:

- ✓ означення рангу матриці;
- ✓ суть теореми Кронекера-Капелі;
- ✓ властивості рангу матриці;
- ✓ означення еквівалентних матриць;
- ✓ методи знаходження рангу матриці.

3. Розглянути приклади знаходження оберненої матриці.

Завдання для самоперевірки:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & 6 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1) Знайти ранг матриці A, якщо

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 5 \\ 2 & 4 & -1 & 0 \\ -2 & -4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

2) Знайти ранг матриці A, якщо

Тема 2. Ранг матриці. Теорема про сумісність систем рівнянь першого степеня(теорема Кронекера-Капелі).

Рангом матриці називається найвищий порядок відмінних від нуля мінорів.

Його позначають через r або $\text{rang}(A)$.

Теорема Кронекера-Капеллі: Система лінійних рівнянь має розв'язок тільки тоді, коли ранг матриці, складеної з коефіцієнтів при невідомих, не змінюється при додаванні до неї стовпця вільних членів (розширена матриця). Цей розв'язок єдиний, якщо цей ранг матриці дорівнює кількості невідомих.

Властивості

1. Ранг матриці рівний нулю лише для нульової матриці. В інших випадках ранг матриці рівний деякому додатному числу.
2. Ранг прямокутної матриці не перевищує меншого із двох чисел m і n , тобто $0 \leq r \leq \min(m, n)$.
3. Для квадратної матриці n -го порядку $r = n$ тільки тоді, коли матриця не вироджена.
4. У випадку квадратної матриці, якщо $r < n$ то визначник матриці дорівнює нулю.

Елементарні перетворення

1. Транспонування, тобто заміна кожного рядка стовпчиком з тим ж номером і навпаки.
2. Перестановка двох рядків або двох стовпчиків.
3. Множення всіх елементів рядка або стовпчика на будь-яке число не рівне нулю.
4. Додавання до всіх елементів рядка або стовпчика відповідних елементів паралельного ряду, помноженого на одне і те ж число.

Матриці, одержані одна з другої елементарними перетвореннями, називаються **еквівалентними**. Еквівалентні матриці не рівні одна одній, але при елементарних перетвореннях матриці її ранг не змінюється. Якщо матриці A і B еквівалентні, то це записують так: $A \Leftrightarrow B$.

Розглянемо два основних методи знаходження рангу матриці.

Перший метод – метод окантування – полягає у наступному:

Якщо всі мінори 1-го порядку, тобто елементи матриці, рівні нулю, то $r = 0$.

Якщо хоч один із мінорів 1-го порядку не дорівнює нулю, а всі мінори 2-го порядку дорівнюють нулю, то $r = 1$.

Якщо мінор 2-го порядку відмінний від нуля, то досліджуємо мінори 3-го порядку. Таким способом знаходять мінор k -го порядку і перевіряють, чи не дорівнюють нулю мінори $k+1$ -го порядку.

Якщо всі мінори $k+1$ -го порядку дорівнюють нулю, то ранг матриці $A(a_{ij})_{m,n}$ дорівнює числу k . Такі мінори $k+1$ -го порядку, як правило, знаходять шляхом "окантування" мінора k -го порядку.

Другий метод визначення рангу матриці полягає в застосуванні елементарних перетворень матриці при зведенні її до діагонального вигляду. Ранг такої матриці дорівнює кількості відмінних від нуля діагональних елементів.

Приклад

Завдання. Знайти ранг матриці A методом окантування.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 & 1 & 5 \\ 12 & 6 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Розв'язок. Матриця $A(a_{ij})_{4,5}$ містить ненульові елементи мінори 1-го порядку, отже її ранг може бути рівний одиниці. Згідно правила ранг матриці не перевищує чотирьом $r \leq 4$. Мінор 2-го порядку

$$M_1 = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 12 & 6 \end{vmatrix} = 4 \cdot 6 - 2 \cdot 12 = 0$$

рівний нулю, але наступний мінор

$$M_2 = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 6 = 14$$

відмінний від нуля. Окантовуючи мінор другого порядку перевіримо третій: для цього розкладемо його по третьому стовпчику

$$M_3 = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 6 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{1+3} 1 \cdot M_2 = 14.$$

Розглянемо мінор четвертого порядку, що окантовує даний

$$M_4 = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 & 5 \\ 6 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Він рівний нулю, оскільки останній рядок нульовий. Лишається обчислити ще один мінор

$$M_5 = \begin{vmatrix} 4 & 2 & -2 & 1 \\ 12 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{1+4} 1 \cdot \begin{vmatrix} 12 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{1+4} 1 \cdot (-1)^{3+1} (-2) \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 12.$$

Шуканий ранг матриці рівний чотирьом ($r = 4$). На прикладі можна бачити, що вибір окантування не завжди можна вдало вибрати і потрібно числити велику кількість мінорів.