

Тема 1. Обернена матриця. Її знаходження

Мета: ознайомитись з оберненою матрицею та її властивостями, оволодіти знаннями про методи та алгоритм її знаходження

Кількість годин: 2

Вид контролю: письмове опитування

Між предметні зв'язки: бухгалтерський облік

Рекомендована література:

1. Вища математика для економістів. Конспект лекцій (І курс) / Уклад.: Ю. П. Буценко, О. О. Диховичний, О. А. Тимошенко. — К: НТУУ «КПІ», 2014. — 256 с.
2. Вища математика: навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. / В.П Дубовик., П. Юрик. - 4-те вид. - К. : Ігнатекс-Україна., 2013. - 648 с: іл. - (Вища школа). - Бібліогр.: с. 632-633.
3. Математика для економістів. Елементи лінійної алгебри: Методичні вказівки та завдання для типових розрахунків / Уклад.: В.М. Долгих, О.М. Назаренко. — Суми: УАБС НБУ, 2005. — 38 с.
4. Мельниченко О.П., Ревецька У.С. Вища математика: Збірник задач та методичні рекомендації для проведення практичних занять та самостійної роботи студентів денної форми навчання економічних спеціальностей. — Біла Церква.— 2010.— 83с.

План вивчення:

1. Написати стислий конспект (вказати номер, тему самостійної роботи) за наступним планом:
 - 1) Означення та основні властивості.
 - 2) Алгоритм знаходження оберненої матриці.
2. Знати:
 - ✓ означення оберненої матриці;
 - ✓ властивості оберненої матриці;
 - ✓ алгоритм знаходження оберненої матриці.
3. Розглянути приклади знаходження оберненої матриці.

Завдання для самоперевірки:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

1) Знайти матрицю обернену матриці

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

2) Знайти обернену A^{-1} матрицю до матриці A , якщо

Тема 1. Обернена матриця. Її знаходження.

Обернена матриця — (матриця (позначається A^{-1}), яка існує для кожної не виродженої квадратної матриці A , розмірності $n \times n$, причому:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n; \text{ де } I_n \text{ — одинична } n \times n \text{ матриця.}$$

Якщо для матриці A існує A^{-1} , то така матриця називається **оборотною**, тобто кожна не вироджена матриця є оборотною, і навпаки — кожна оборотна матриця є не виродженою.

Властивості

- $(A^{-1})^{-1} = A$ — операція обернення є інволюцією.
- $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ — обернення транспонованої матриці
- $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$ — обернення спряженої матриці
- $(kA)^{-1} = k^{-1}A^{-1}$ для довільного коефіцієнта $k \neq 0$.
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
- $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$ — визначник оберненої матриці.
- $\text{rang}(A) = n$ — ранг матриці дорівнює розміру матриці.

Знаходження оберненої матриці

- Метод Гауса — Жордана
 - LU розклад матриці
 - $$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \tilde{A}$$
 де $\tilde{A}$ — союзна матриця.
-

Алгоритм знаходження оберненої матриці

Нехай маємо квадратну матрицю

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

і потрібно знайти обернену до неї. Для цього потрібно виконати наступні дії:

1. Знайти визначник матриці $|A| = \Delta$. Якщо він не рівний нулю то виконуємо наступні дії. В іншому випадку дана матриця вироджена і для неї не існує оберненої.

2. Знайти алгебраїчні доповнення елементів матриці A . Вони рівні мінорам, помноженим на -1 в степені суми рядка і стовпця, для якого шукаємо.

3. Скласти матрицю з алгебраїчних доповнень елементів матриці A та протранспонувати її. Ця матриця називається **приєднаною** або **союзною** і позначається $\tilde{A}$.

4. Поділити приєднану матрицю на детермінант $1/\Delta$. Отримана матриця буде оберненою та задовільнятиме властивостям, які викладені на початку статті.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{\Delta} & \frac{A_{21}}{\Delta} & \dots & \frac{A_{n1}}{\Delta} \\ \frac{A_{12}}{\Delta} & \frac{A_{22}}{\Delta} & \dots & \frac{A_{n2}}{\Delta} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{A_{1n}}{\Delta} & \frac{A_{2n}}{\Delta} & \dots & \frac{A_{nn}}{\Delta} \end{pmatrix}$$

Приклад

Знайти матрицю, обернену до матриці (Дубовик В.П., Юрик І.І. "Вища математика. Збірник задач")

$$1) \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix};$$

Розв'язок.

Знаходимо визначник матриці

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 3 \cdot 7 - 4 \cdot 5 = 21 - 20 = 1.$$

Так як детермінант не рівний нулю ($\Delta = 1 \neq 0$), то обернена матриця існує. Знаходимо матрицю, складену з алгебраїчних доповнень

$$\bar{A}_{1,1} = +7; \bar{A}_{1,2} = -5; \bar{A}_{2,1} = -4; \bar{A}_{2,2} = 3.$$

Матриця доповнень набуде вигляду

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 7 & -5 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Транспонуємо її і отримуємо приєднану $\tilde{A}$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 7 & -5 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Поділимо її на визначник і отримаємо обернену

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Бачимо, що у випадку, коли визначник рівний одиниці приєднана і обернена матриці співпадають.

2) (1.130)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix};$$

Розв'язок.

Обчислюємо визначник матриці

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot 3 \cdot (-3) + 5 \cdot 4 \cdot 5 + 7 \cdot 6 \cdot (-2) - (7 \cdot 3 \cdot 5 + 5 \cdot 6 \cdot (-3) + 2 \cdot 4 \cdot (-2)) = \\ = -18 + 100 - 84 - 105 + 90 + 16 = -1.$$

Знаходимо матрицю алгебраїчних доповнень $\bar{A}$

$$\bar{A}_{1,1} = + \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-3) - 4 \cdot (-2) = -1;$$

$$\bar{A}_{1,2} = - \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = -(6 \cdot (-3) - 4 \cdot 5) = -38;$$

$$\bar{A}_{1,3} = + \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -(6 \cdot (-2) - 3 \cdot 5) = -27;$$

$$\bar{A}_{2,1} = - \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = -(5 \cdot (-3) - 7 \cdot (-2)) = 1;$$

$$\bar{A}_{2,2} = + \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-3) - 7 \cdot 5 = -41;$$

$$\bar{A}_{2,3} = - \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -(2 \cdot (-2) - 5 \cdot 5) = 29;$$

$$\bar{A}_{3,1} = + \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 5 \cdot 4 - 7 \cdot 3 = -1;$$

$$\bar{A}_{3,2} = - \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = -(2 \cdot 4 - 7 \cdot 6) = 34;$$

$$\bar{A}_{3,3} = + \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 - 5 \cdot 6 = -24.$$

Кінцевий вигляд матриці доповнень наступний

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} -1 & 38 & -27 \\ 1 & -41 & 29 \\ -1 & 34 & -24 \end{pmatrix}.$$

Протранспонувавши її, знайдемо союзну матрицю

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 38 & -41 & 34 \\ -27 & 29 & -24 \end{pmatrix}.$$

Знаходимо обернену матрицю

$$A^{-1} = \frac{1}{-1} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 38 & -41 & 34 \\ -27 & 29 & -24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{pmatrix}.$$