

ЗАНЯТТЯ № 3

Тема: Матриці, основні поняття та властивості. Операції над матрицями

Мета:

Навчальна: познайомити студентів з різними видами матриць, діями які виконуються над матрицями

Розвиваюча: розвиток мислення, вміння аналізувати матеріал, діяти за аналогією

Виховна: продовжувати формувати світогляд, позитивне ставлення до навчання, виховувати культуру мовного спілкування в ході бесіди.

Тип заняття: засвоєння нових знань

Засоби навчання: підручник, ілюстрації

Між предметні зв'язки: бухгалтерський облік

Методи: лекція, пояснення, бесіда, вправи

Кількість годин: 2

Література:

Базова:

1. Аналітична геометрія. Лінійна алгебра: Навчально-методичний посібник / Укл.: І.Д.Пукальський, І.П.Лусте. —Чернівці: Рута, 2007. — 244 с.
2. Вища математика для економістів. Конспект лекцій (І курс) / Уклад.: Ю. П. Буценко, О. О. Диховичний, О. А. Тимошенко. — К: НТУУ «КПІ», 2014. — 256 с.
3. Вища математика: навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. / В.П Дубовик., П. Юрик. - 4-те вид. - К. : Ігнатекс-Україна., 2013. - 648 с: іл. - (Вища школа). - Бібліогр.: с. 632-633.
4. Дюженкова Л. І., Дюженкова О. Ю., Михалін Г. О. Вища математика. Прикладні задачі. — К. : Видавничий центр «Академія», 2003.
5. Кривуца В. Г., Барковський В. В., Барковська Н. В. Вища математика: практикум. — К.: ЦУЛ, 2003.
6. Математика для економістів. Елементи лінійної алгебри: Методичні вказівки та завдання для типових розрахунків / Уклад.: В.М. Долгіх, О.М. Назаренко. — Суми: УАБС НБУ, 2005. — 38 с.
7. Шеченко Р.Л. Основи вищої математики. — Біла Церква, 2005.

Допоміжна:

1. Валуце І. І. Математика для технікумів. — М. : наука, 1990.
2. Піскунов Н. С. Диференціальне числення. — Т.1,2. — М. : Наука, 1997.
3. Соколенко О. І. Вища математика: підручник. — К.: Видавничий центр «Академія», 2002.

Інформаційні ресурси

1. Вища математика для економістів
<http://matan.kpi.ua/public/files/%D0%92%D0%9C%D0%B4%D0%95.%D0%9A%D0%BE%D0%BD%D1%81%D0%BF%D0%B5%D0%BA%D1%82.pdf>
2. Высшая математика <https://www.kontrolnaya-rabota.ru/wow/vishaya-matematika/>
3. Лекции по высшей математике <http://www.toehelp.ru/theory/math/>

Структура заняття

1. Організаційна частина.

2. Актуалізація опорних знань.

Пригадаємо де ми зустрічаємось з поняттям «матриця»

3. Повідомлення теми, формування мети та основних завдань

4. Мотивація навчальної діяльності

Значення теми для майбутньої діяльності; вивчення інших тем і дисциплін, повсякденних справ

5. План заняття

1) Поняття матриці.

2) Дії(операції) над матрицями.

6. Підведення підсумків

- узагальнення матеріалу викладачем
- видача завдань для самостійної роботи студентів

Зробити короткий конспект за наступним планом:

1. Обернена матриця. Означення та основні властивості.

2. Алгоритм знаходження оберненої матриці.

Контрольні запитання

1. Дайте означення матриці.

2. Які види матриць вам відомі. Навести приклад.

3. Назвіть основні властивості матриць.

4. Які дії над матрицями виконуються.

1) Поняття матриці.

Матрицями називають математичні об'єкти, які мають вигляд таблиць з числовими елементами. Ці елементи обрамляють круглими дужками, а самі матриці позначають великими латинськими літерами.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{m3} \end{pmatrix}$$

В складних числових розрахунках можна зустріти трьох вимірні матриці (у вигляді кубиків) та багатовимірні. Однак Ви їх при здобутті вищої освіти зустрічати точно не будете, тому далі мова піде тільки про знайомі для більшості матриці. Горизонталі елементи матриці називають елементами рядків, вертикальні – відповідно елементами стовпців. В позначеннях розмірності матриці першим йде індекс який вказує кількість рядків, другий кількість стовпців. Наприклад, запис $A = (a_{ij})_{4 \times 5}$ вказує на те, що матриця має 4 рядки і 5 стовпців.

ВИДИ МАТРИЦЬ

В залежності від розмірності та вмісту **матриці поділяють** на

1) **Квадратні** $A = (a_{ij})_{N \times N}$ та прямокутні матриці $A = (a_{ij})_{M \times N}$. Наприклад,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ – прямокутна матриця;}$$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \text{ – квадратна матриця.}$$

2) **Одинична матриця** – по головній діагоналі одиниці, решта всі елементи рівні нулеві. Позначають великою латинською літерою E.

Для прикладу, матриця

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ є одиничною матрицею третього порядку.}$$

3) **Діагональна** – елементи поза головною діагоналлю нульові, на головній – будь-які. Наприклад, матриця

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

4) **Симетрична матриця** – елементи такої матриці симетричні відносно головної діагоналі $A = (a_{ij}) = (a_{ji})$.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ -2 & 2 & 4 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

5) **Верхня трикутна (нижня трикутна) матриця** – елементи під діагоналлю (над діагоналлю) в таких матрицях нульові. Наприклад,

Верхня трикутна – $\begin{pmatrix} 1 & 5 & -4 \\ 0 & 8 & 7 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

Нижня трикутна $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

У випадку, коли елементи головної діагональні в трикутній матриці одиничні її називають унітрикутною

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & -4 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2) **Дії (операції) над матрицями.**

Основними операціями над матрицями є додавання, віднімання, множення, транспонування. Щоб легше Вам було зрозуміти правила ми наведемо короткі приклади.

- **Сумою (різницею) двох матриць** називають матрицю, елементи якої утворюються попарним додаванням (відніманням) елементів матриць.

Для прикладу, додавання двох матриць

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 7 & 6 & 1 \\ 2 & 3 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & -3 & 3 \\ 5 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+1 & 2+4 & -5+2 \\ 7+2 & 6-3 & 1+3 \\ 2+5 & 3-2 & 8-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 & -3 \\ 9 & 3 & 4 \\ 7 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

та їх різниця

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 7 & 6 & 1 \\ 2 & 3 & 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & -3 & 3 \\ 5 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-1 & 2-4 & -5-2 \\ 7-2 & 6-(-3) & 1-3 \\ 2-5 & 3-(-2) & 8-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -7 \\ 5 & 9 & -2 \\ -3 & 5 & 9 \end{pmatrix}.$$

Слід зазначити, що додавати та віднімати можна лише матриці однакових розмірів, тобто кількість рядків першої матриці має дорівнювати кількості рядків другої, те саме стосується і стовпців. Однак кількість рядків і стовпців матриць може не співпадати, тобто сумувати та шукати різниці можна як для квадратних матриць так і для прямокутних.

- **Транспонуванням матриці** називають впорядковану заміну рядків

матриці стовпцями і позначають $A^T = (a_{ji})_{m \times n}^T = (a_{ji})_{n \times m}$.

На практиці транспонування матриці виглядає наступним чином

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix},$$

$$B^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

Вибирайте, що Вам візуально зрозуміліше – обидва варіанти дають правильний результат.

Властивості операцій транспонування матриць запишемо в матричному вигляді

$$1) (A^T)^T = A$$

$$2) (A + B)^T = A^T + B^T$$

$$3) (AB)^T = B^T A^T$$

Результатом множення матриці $A = (a_{ij})$ на число α буде матриця B , елементи якої збільшені в α разів порівняно з A , тобто $B = (b_{ij}) = (\alpha a_{ij})$.

- **Множення (добуток) двох матриць** $A_{n \times j}, B_{j \times m}$ знаходять за правилом, яке можна застосувати лише до матриць в яких кількості стовпців першої та рядків другої матриці співпадають $j = m$. В результаті отримують матрицю $C_{n \times m}$, розмірності кількості рядків першої на стовпців другої з

елементами C_{kl} , які рівні сумі попарних добутків елементів k -го рядка першої матриці, на елемент l -го стовпця другої матриці.

$$C_{kl} = \sum_{s=1}^N a_{ks} \cdot b_{sl}$$

На перший погляд складне і запутане правило досить легко пояснити на практиці. Нехай маємо дві матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Елементи рядків першої і стовпців другої позначимо в різні кольори для того, щоб Вам наочніше продемонструвати правило множення матриць. Умова рівності кількості стовпців першої матриці = кількості рядків другої виконується ($3=3$).

Виконуємо обчислення елементів добутку матриць

$$C_{11} = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 3 + 2 + 6 = 11;$$

$$C_{12} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 = 2 + 6 + 12 = 18;$$

$$C_{13} = 1 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) + 3 \cdot 2 = 1 - 4 + 6 = 3;$$

$$C_{21} = 2 \cdot 3 + (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 6 - 1 + 4 = 9;$$

$$C_{22} = 2 \cdot 2 + (-1) \cdot 3 + 2 \cdot 4 = 4 - 3 + 8 = 9;$$

$$C_{23} = 2 \cdot 1 + (-1) \cdot (-2) + 2 \cdot 2 = 2 + 2 + 4 = 8.$$

Записуючи матрицю в табличному вигляді

$$A_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} 11 & 18 & 3 \\ 9 & 9 & 8 \end{pmatrix}$$

легко переконатися, що утворена матриця має розмірність 2 – кількості рядків першої матриці на 3 – кількість стовпців другої (про що і було сказано в правилі). За тими ж правилами знаходять добутки квадратних і прямокутних матриць великих розмірів, кількість обчислень при цьому зростає.

Додавання та множення матриць можна охарактеризувати властивостями:

- 1) $A + B = B + A$ – комутативність
- 2) $A + (B + C) = (A + B) + C$ – асоціативність
- 3) $A + 0 = A$

Для будь якої ненульової матриці існує протилежна матриця $A + (-A) = 0$

4) Константу можна виносити за правилом $(\alpha A)B = A(\alpha B)$

5) Асоціативність множення

$$(A + B)C = AC + BC,$$

$$A(B + C) = AB + AC$$

6) $(AB)C = A(BC)$

Множення матриць не є комутативною операцією, тобто

$$AB \neq BA \quad AE = EA.$$

Комутативність має місце лише у випадку коли матриці – квадратні і одна з них є оберненою до іншої, але про це мова піде в наступних статтях. Зараз постарайтеся розібратися з наведеним матеріалом, він стане Вам в нагоді при вивченні складніших операцій з матрицями.