

ЗАНЯТТЯ № 12

Тема: Диференціальні рівняння першого порядку, основні поняття, означення.
Диференціальні рівняння з відокремленими та відокремлюваними змінними.

Мета:

Навчальна: ознайомлення з диференціальні рівняння першого порядку та диференціальні рівняння з відокремленими та відокремлюваними змінними

Розвиваюча: розвиток уявлення, пам'яті, творчого мислення.

Виховна: виховувати культуру мовного спілкування в ході бесіди, формувати спец лексику, активну громадянську позицію, навички самостійно приймати рішення; розвивати творчий та естетичний потенціал, критичне мислення студентів.

Тип заняття: засвоєння нових знань

Засоби навчання: підручник, ілюстрації

Між предметні зв'язки: бухгалтерський облік

Методи: лекція, пояснення, бесіда

Кількість годин: 3

Література:

Базова:

1. Аналітична геометрія. Лінійна алгебра: Навчально-методичний посібник / Укл.: І.Д.Пукальський, І.П.Лусте. –Чернівці: Рута, 2007. – 244 с.
2. Вища математика для економістів. Конспект лекцій (І курс) / Уклад.: Ю. П. Буценко, О. О. Диховичний, О. А. Тимошенко. — К: НТУУ «КПІ», 2014. — 256 с.
3. Вища математика: навч. посіб. для студ. вищ. навч. зак. / В.П Дубовик., П. Юрик. - 4-те вид. - К. : Ігнатекс-Україна., 2013. - 648 с: іл. - (Вища школа). - Бібліогр.: с. 632-633.
4. Дюженкова Л. І., Дюженкова О. Ю., Михалін Г. О. Вища математика. Прикладні задачі. – К. : Видавничий центр «Академія», 2003.
5. Кривуца В. Г., Барковський В. В., Барковська Н. В. Вища математика: практикум. – К.: ЦУЛ, 2003.
6. Математика для економістів. Елементи лінійної алгебри: Методичні вказівки та завдання для типових розрахунків / Уклад.: В.М. Долгіх, О.М. Назаренко. – Суми: УАБС НБУ, 2005. – 38 с.
7. Шеченко Р.Л. Основи вищої математики. – Біла Церква, 2005.

Допоміжна:

1. Валуце І. І. Математика для технікумів. – М. : наука, 1990.
2. Піскунов Н. С. Диференціальне числення. – Т.1,2. – М. : Наука, 1997.
3. Соколенко О. І. Вища математика: підручник. – К.: Видавничий центр «Академія», 2002.

Інформаційні ресурси

1. Вища математика для економістів
<http://matan.kpi.ua/public/files/%D0%92%D0%9C%D0%B4%D0%95.%D0%9A%D0%BE%D0%BD%D1%81%D0%BF%D0%B5%D0%BA%D1%82.pdf>
2. Высшая математика <https://www.kontrolnaya-rabota.ru/wow/vishaya-matematika/>
3. Лекции по высшей математике <http://www.toehelp.ru/theory/math/>

Структура заняття

1. Організаційна частина.
2. Повідомлення теми, формування мети та основних завдань
3. Актуалізація опорних знань.
4. Мотивація навчальної діяльності
5. Значення теми для майбутньої діяльності; вивчення інших тем і дисциплін, повсякденних справ
6. План заняття
 - 1) Диференціальне рівняння першого порядку, основні поняття та означення
 - 2) Типи диференціальних рівнянь першого порядку та способи їх інтегрування.
7. Підведення підсумків
 - узагальнення матеріалу викладачем
 - повідомлення домашнього завдання

Контрольні запитання

1. Дайте означення диференціального рівняння першого порядку.
2. У чому полягає суть теореми існування та єдності розв'язку задачі Коші?
3. Яке диференціальне рівняння називається автономним?
4. Назвіть типи диференціальних рівнянь першого порядку.
5. Назвіть способи її інтегрування.

1) Диференціальне рівняння першого порядку, основні поняття та означення

Диференціальне рівняння першого порядку має вигляд

$$f(x, y, y') = 0,$$

або у нормальній формі,

$$y' = f(x, y).$$

Геометричне тлумачення такого рівняння полягає у наступному. Якщо D - область на площині Oxy , в кожній точці якої визначена функція $f(x, y)$, то в кожній такій точці $M(x, y)$ $\operatorname{tg} \alpha = f(x, y)$ є кутовим коефіцієнтом дотичної до інтегральної кривої рівняння $y' = f(x, y)$, яка проходить через цю точку. Має місце наступна **теорема існування та єдності розв'язку задачі Коші**:

Нехай функція $f(x, y)$ неперервна разом зі своєю похідною $\frac{\partial f}{\partial y}$ неперервні у відкритій множині D , тоді для всякої точки $M_0(x_0, y_0) \in D$ знайдеться розв'язок рівняння $y' = f(x, y)$, який задовольняє умові $y(x_0) = y_0$, причому якщо $y_1(x), y_2(x)$ - два розв'язки, $y_1(x_0) = y_2(x_0)$, то ці два розв'язки співпадають.

Інакше кажучи, через кожну точку області D проходить лише одна інтегральна крива рівняння $y' = f(x, y)$. Відзначимо, що розв'язок задачі Коші може бути не єдиним в простих випадках.

Автономним називатимемо диференціальне рівняння першого порядку автономним, якщо воно має вигляд $y' = f(y)$. Якщо для функції $f(y)$ виконані умови існування та єдності розв'язку задачі Коші та ця функція має відокремлену послідовність нулів $y_1, y_2, \dots$, при $f(y_1) = f(y_2) = 0$, то точки $y_1, y_2, \dots$ (точки рівноваги або ж стаціонарні точки) пов'язані з прямими $y = y_1, y = y_2, \dots$, що розділяють область D на смуги, в кожній з яких всі інтегральні криві є або зростаючими, або спадаючими.

2) Типи диференціальних рівнянь першого порядку та способи їх інтегрування.

Розглянемо тепер конкретні типи диференціальних рівнянь першого порядку та способи їх інтегрування.

А. Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними.

Рівняння вигляду

$$P_1(x)P_2(y)dx + Q_1(x)Q_2(y)dy = 0 \quad \text{або} \quad \frac{dy}{dx} = f_1(x) \cdot f_2(y)$$

називається диференціальним рівнянням першого порядку з відокремлюваними змінними. Такі рівняння розв'язуються шляхом відокремлення змінних з наступним інтегруванням:

$$\int \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} dx = - \int \frac{Q_2(y)}{P_2(y)} dy,$$

або

$$\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x) dx.$$

Б. Однорідні диференціальні рівняння першого порядку.

Диференціальне рівняння $y' = f(x, y)$ називається однорідним, якщо функція $f(x, y)$ може бути представлена у вигляді $\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ - такі функції називаються *однорідними нульового степеня* (зауважимо, що, наприклад, квадратична форма є однорідною функцією другого степеня).

Для розв'язання такого рівняння запроваджується допоміжна функція

$$z = \frac{y}{x},$$

Тоді маємо

$$y = zx \quad y' = \frac{dz}{dx}x + z,$$

рівняння набуває вигляду

$$\frac{dz}{dx}x + z = \varphi(z),$$

звідки

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\varphi(z) - z}{x}.$$

Отримане рівняння з відокремлюваними змінними розв'язується відповідно до попереднього, остаточно

$$\int \frac{dz}{\varphi(z) - z} = \int \frac{dx}{x}.$$

В. Лінійні диференціальні рівняння першого порядку.

Рівняння вигляду $y' + f(x)y = g(x)$, де $f(x)$ та $g(x)$ - неперервні функції змінної x , називається лінійним диференціальним рівнянням першого порядку. Якщо $g(x) = 0$, рівняння називається лінійним однорідним, інакше - лінійним неоднорідним.

Такі рівняння можуть бути розв'язані різними способами, одним з них є наступний.

Покладемо

$$y = u(x)v(x),$$

тоді

$$y = \frac{du}{dx}v(x) + u(x)\frac{dv}{dx}.$$

Звідки маємо

$$\frac{du}{dx}v(x) + u(x)\frac{dv}{dx} + f(x)u(x)v(x) = g(x).$$

Покладемо $\frac{dv}{dx} + f(x)v(x) = 0$, тоді $\int \frac{dv}{v} = \int f(x)dx$,

звідки

$$v = e^{-\int f(x)dx},$$

таким чином

$$\frac{du}{dx} C e^{-\int f(x)dx} = g(x),$$

тобто

$$u(x) = \int g(x) e^{\int f(x)dx} dx.$$

Остаточно маємо

$$y(x) = e^{-\int f(x) dx} \left(\int g(x) e^{\int f(x) dx} dx + C \right).$$

Г. Рівняння Бернуллі.

Рівнянням Бернуллі називається рівняння вигляду $y' + p(x)y = q(x)y^\alpha$. Можемо, наприклад, звести таке рівняння до лінійного, підстановкою $z = y^{1-\alpha}$, після чого розв'язувати отримане лінійне рівняння.