

ЗАНЯТТЯ № 11

Тема: Первісна та її властивості. Невизначений інтеграл та його властивості.

Таблиця основних невизначених інтегралів

Мета:

Навчальна: ознайомлення з первісною, невизначеним інтегралом та їх властивостями

Розвиваюча: розвиток уявлення, пам'яті, творчого мислення

Виховна: продовжувати формувати світогляд, позитивне ставлення до навчання, виховувати культуру мовного спілкування в ході бесіди.

Тип: комбіноване заняття

Засоби навчання: підручник, роздатковий матеріал

Між предметні зв'язки: туристичне краєзнавство

Методи: лекція, бесіда, ілюстрування

Кількість годин: 2

Література:

Базова:

1. Аналітична геометрія. Лінійна алгебра: Навчально-методичний посібник / Укл.: І.Д.Пукальський, І.П.Лусте. –Чернівці: Рута, 2007. – 244 с.
2. Вища математика для економістів. Конспект лекцій (І курс) / Уклад.: Ю. П. Буценко, О. О. Диховичний, О. А. Тимошенко. — К: НТУУ «КПІ», 2014. — 256 с.
3. Вища математика: навч. посіб. для студ. вищ. навч. зак. / В.П Дубовик., П. Юрик. - 4-те вид. - К. : Ігнатекс-Україна., 2013. - 648 с: іл. - (Вища школа). - Бібліогр.: с. 632-633.
4. Дюженкова Л. І., Дюженкова О. Ю., Михалін Г. О. Вища математика. Прикладні задачі. – К. : Видавничий центр «Академія», 2003.
5. Кривуца В. Г., Барковський В. В., Барковська Н. В. Вища математика: практикум. – К.: ЦУЛ, 2003.
6. Математика для економістів. Елементи лінійної алгебри: Методичні вказівки та завдання для типових розрахунків / Уклад.: В.М. Долгіх, О.М. Назаренко. – Суми: УАБС НБУ, 2005. – 38 с.
7. Шеченко Р.Л. Основи вищої математики. – Біла Церква, 2005.

Допоміжна:

1. Валуце І. І. Математика для технікумів. – М. : наука, 1990.
2. Піскунов Н. С. Диференціальне числення. – Т.1,2. – М. : Наука, 1997.
3. Соколенко О. І. Вища математика: підручник. – К.: Видавничий центр «Академія», 2002.

Інформаційні ресурси

1. Вища математика для економістів
<http://matan.kpi.ua/public/files/%D0%92%D0%9C%D0%B4%D0%95.%D0%9A%D0%BE%D0%BD%D1%81%D0%BF%D0%B5%D0%BA%D1%82.pdf>
2. Высшая математика <https://www.kontrolnaya-rabota.ru/wow/vishaya-matematika/>
3. Лекции по высшей математике <http://www.toehelp.ru/theory/math/>

Структура заняття

1. Організаційна частина.
2. Повідомлення теми, формування мети та основних завдань
3. Актуалізація опорних знань.
4. Мотивація навчальної діяльності
5. Значення теми для майбутньої діяльності; вивчення інших тем і дисциплін, повсякденних справ
6. План заняття
 - 1) Первісні та невизначений інтеграл функції, їх властивості.
 - 2) Таблиця основних інтегралів. Основні правила та методи інтегрування.
7. Підведення підсумків
 - узагальнення матеріалу викладачем
 - повідомлення домашнього завдання

Контрольні запитання

1. Дати означення первісної, невизначеного інтеграла.
2. Назвіть основні властивості невизначеного інтеграла.
3. Яку операцію називають інтегруванням? До якої математичної операції вона є оберненою?
4. Назвіть основні правила інтегрування.
5. З основних методів інтегрування зазвичай виділяють три. Назвіть їх.

1) Первісні та невизначений інтеграл функції, їх властивості.

Традиційним для математики є підхід, при якому разом із запровадженням деякої дії (операції) розглядається обернена (зворотна) до неї. Так, разом із операцією диференціювання функцій розглядається операція їх інтегрування.

Первісною будемо називати функцію $F(x)$ для заданої функції $f(x)$, якщо $F'(x) = f(x)$.

Зауважимо, що з правил диференціювання випливає $[F(x) + c]' = f(x)$. Більше того, справедлива основна властивість первісних: будь-які дві первісні для заданої функції відрізняються лише сталим доданком. Дійсно, якщо $F_1(x)$ та $F_2(x)$ – первісні $f(x)$, то $[F_1(x) - F_2(x)]' = 0$, тобто $F_1(x) - F_2(x)$ – стала. Таким чином, для знаходження всієї множини первісних функцій $f(x)$ досить знайти одну з них і додати до неї довільну сталу.

Невизначеним інтегралом називається сукупність всіх первісних функцій $f(x)$ і його позначають $\int f(x)dx$.

Як випливає з попереднього, $\int f(x)dx = F(x) + C$, де $F(x)$ – деяка (довільна) первісна $f(x)$, C – довільна стала.

Знак $\int$ (стилізована літера S) називається знаком інтеграла, $f(x)$ – підінтегральною функцією, $f(x)dx$ – підінтегральним виразом, x – змінною інтегрування, а процес знаходження інтеграла – інтегруванням. Зазначимо, що інтеграл існує, якщо $f(x)$ – неперервна функція.

Основними властивостями невизначеного інтеграла є наступні:

1) Диференціал інтеграла є підінтегральний вираз.

Дійсно, якщо за означенням $(\int f(x)dx)' = f(x)$, то $d(\int f(x)dx) = f(x)dx$

2) Невизначений диференціал від диференціала функції дорівнює сумі цієї функції та довільної сталої.

Дійсно, $\int dF(x) = \int F'(x)dx = \int f(x)dx = F(x) + c$.

2) Таблиця основних інтегралів. Основні правила та методи інтегрування.

Аналогічно до того, як це робилося для похідних, розглянемо таблицю інтегралів деяких основних функцій (сенс вибору як змінної інтегрування буде пояснений пізніше).

- | | |
|---|---|
| 1. $\int 0 du = C$. | |
| 2. $\int du = u + C$. | |
| 3. $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, (n \neq -1)$. | 10. $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctgu} + C$. |
| 4. $\int \frac{du}{u} = \ln u + C$. | 11. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + C$. |
| 5. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$. | 12. $\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{u}{a} + C$. |
| 6. $\int e^u du = e^u + C$. | 13. $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{u-a}{u+a} \right + C$ - «високий логарифм». |
| 7. $\int \sin u du = -\cos u + C$. | 14. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + a}} = \ln \left u + \sqrt{u^2 + a} \right + C$ - «довгий логарифм». |
| 8. $\int \cos u du = \sin u + C$. | 15. $\int \frac{u du}{u^2 + a} = \frac{1}{2} \ln u^2 + a + C$ - «корисний логарифм». |
| 9. $\int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tgu} + C$. | |

Основні правила інтегрування впливають з основних правил диференціювання і полягають у наступному:

- 1) Сталий множник виноситься за знак інтеграла.
 - 2) Інтеграл алгебраїчної суми дорівнює алгебраїчній сумі інтегралів.
- З основних методів інтегрування зазвичай виділяють три.

А. Метод розкладу

Цей метод ґрунтується на другому правилі інтегрування і полягає в тому, що підінтегральна функція представляється у вигляді суми функцій більш зручних для інтегрування, ніж вихідна. Надалі цей метод буде використаний для інтегрування дробово-раціональних функцій.

Б. Метод заміни змінної (підстановки)

З правила диференціювання складної функцій впливає інваріантність форми

першого диференціалу: якщо $y = f(u), u = \varphi(x)$, то $dy = f'(u)du = f'(\varphi(x))\varphi'(x)dx$, таким

чином, якщо $\int f(u) du = F(u) + c$, то $\int f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx = F(\varphi(x)) + c$. (легко перевірити, знаходячи диференціали обох частин рівності).

Це означає, що при знаходженні інтегралів можливе використання наступних прийомів:

- 1) здійснити підстановку $x = \varphi(t)$, в результаті чого $\int f(x) dx$ перетвориться на $\int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$, причому останній може виявитись більш простим;
- 2) зробити заміну змінної $t = \varphi(x)$, що знову ж таки може привести до більш зручного інтегралу.

В. Метод інтегрування частинами

Нагадаємо, що справедливе співвідношення $d(uv) = du \cdot v + u \cdot dv$, або, що те ж саме, $u \cdot dv = d(uv) - v \cdot du$. Знаходячи інтеграли лівої та правої частин останньої рівності і використавши другу основну властивість невизначеного інтегралу, маємо

$$\int u dv = \int d(uv) - \int v du = uv - \int v du.$$

Рівність $\int u dv = uv - \int v du$ називається формулою інтегрування частинами і дає можливість обчислювати деякі інтеграли, користуючись представленням їх підінтегрального виразу $f(x)$ у вигляді $u(x)v'(x)dx = u(x)dv(x)$, що дозволяє перейти до інтегралу $\int v(x)u'(x)dx = \int v(x)du(x)$. Такий метод знаходження інтегралів використовується, в основному, в трьох варіантах:

- 1) Зниження степеня.
- 2) «Алгебризація».
- 3) «Інтегрування по колу».