

Практичне заняття № 3

Тема : Обчислення площ фігур за допомогою визначного та подвійного інтегралів

Мета:

Навчальна: набуття вмінь і навичок обчислення площ фігур за допомогою інтегралів

Розвиваюча: розвиток уявлення, пам'яті, творчого мислення.

Виховна: виховувати культуру мовного спілкування в ході бесіди, формувати спец лексику, активну громадянську позицію, навички самостійно приймати рішення; розвивати творчий та естетичний потенціал, критичне мислення студентів.

Тип заняття: формування та вдосконалення вмінь вмінь і навичок

Засоби навчання: підручник, роздатковий матеріал

Між предметні зв'язки: с/г землеробство

Методи: пояснення, вправи

Кількість годин: 2

Структура заняття

1. Організаційна частина
2. Повідомлення теми, мети заняття
3. Актуалізація опорних знань
4. Мотивація навчальної діяльності
5. Закріплення вмінь, виконання типових завдань
6. Самостійна робота студентів
7. Підведення підсумків заняття
8. Повідомлення домашнього завдання

Контрольні запитання

1. Поясніть постановку задачі знаходження площі криволінійної трапеції.
2. Яку суму називають інтегральною?
3. Дайте означення визначеного інтеграла.
4. Поясніть яка відмінність існує між визначеними та невизначеним інтегралом?
5. Чи має значення для обчислення визначеного інтеграла, якою літерою позначається змінна інтегрування?
6. Які задачі приводять до поняття подвійного інтеграла?
7. Дати означення подвійного інтеграла, сформульовано необхідну і достатні умови інтегрованості функції в області.
8. Навести властивості подвійного інтеграла.
9. Як використовуючи поняття визначеного інтеграла, можна обчислювати площі плоских фігур?
10. Як за допомогою подвійного інтегралу знаходять площу фігури?

Література:

Базова:

1. Аналітична геометрія. Лінійна алгебра: Навчально-методичний посібник / Укл.: І.Д.Пукальський, І.П.Лусте. – Чернівці: Рута, 2007. – 244 с.
2. Вища математика для економістів. Конспект лекцій (І курс) / Уклад.: Ю. П. Буценко, О. О. Диховичний, О. А. Тимошенко. — К: НТУУ «КПІ», 2014. — 256 с.
3. Вища математика: навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. / В.П Дубовик., П. Юрик. - 4-те вид. - К. : Ігнатекс-Україна., 2013. - 648 с: іл. - (Вища школа). - Бібліогр.: с. 632-633.
4. Дюженкова Л. І., Дюженкова О. Ю., Михалін Г. О. Вища математика. Прикладні задачі. – К. : Видавничий центр «Академія», 2003.
5. Кривуца В. Г., Барковський В. В., Барковська Н. В. Вища математика: практикум. – К.: ЦУЛ, 2003.
6. Математика для економістів. Елементи лінійної алгебри: Методичні вказівки та завдання для типових розрахунків / Уклад.: В.М. Долгих, О.М. Назаренко. – Суми: УАБС НБУ, 2005. – 38 с.
7. Шеченко Р.Л. Основи вищої математики. – Біла Церква, 2005.

Допоміжна:

1. Валуце І. І. Математика для технікумів. – М. : наука, 1990.
2. Піскунов Н. С. Диференціальне числення. – Т.1,2. – М. : Наука, 1997.
3. Соколенко О. І. Вища математика: підручник. – К.: Видавничий центр «Академія», 2002.

Інформаційні ресурси

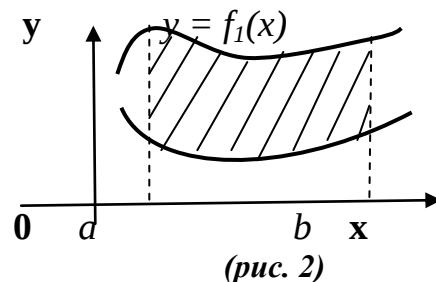
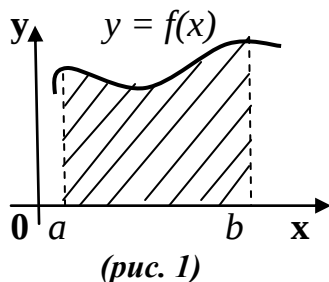
1. Вища математика для економістів
<http://matan.kpi.ua/public/files/%D0%92%D0%9C%D0%B4%D0%95.%D0%9A%D0%BE%D0%BD%D1%81%D0%BF%D0%B5%D0%BA%D1%82.pdf>
2. Высшая математика <https://www.kontrolnaya-rabota.ru/wow/vishaya-matematika/>
3. Лекции по высшей математике <http://www.toehelp.ru/theory/math/>

Практичне заняття № 3

Метод обчислення площ плоских фігур ґрунтується на використанні геометричного змісту визначеного інтеграла: якщо на відрізку $[a; b]$ функція $y = f(x)$ неперервна і набуває невід'ємних значень, то значення інтеграла $\int_a^b f(x)dx$ дорівнює площі криволінійної трапеції, обмеженої графіком функції $y = f(x)$, віссю Ox та прямими $x = a$ та $x = b$ (рис. 1)

Якщо фігура обмежена графіком функцій $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ та прямими $x = a$, $x = b$, (рис. 2), доцільно скористатись формулою для обчислення площі:

$$S = \int_a^b [f_1(x) - f_2(x)]dx \quad (*)$$



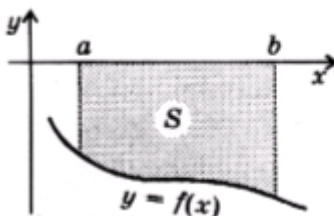
Формула (*) справджується для будь-якої плоскої фігури, обмеженої «зверху» графіком функції $y = f_1(x)$, а «знизу» – графіком функції $y = f_2(x)$, причому абсиси точок фігури повинні лежати в межах $a \leq x \leq b$ (причому існують точки як з абсцисою a , так і з абсцисою b).

В разі, коли $f(x) < 0$ на $[a; b]$ $S = \int_a^b [-f(x)]dx = -\int_a^b f(x)dx \quad (**)$

Обчислення площ за допомогою інтеграла.

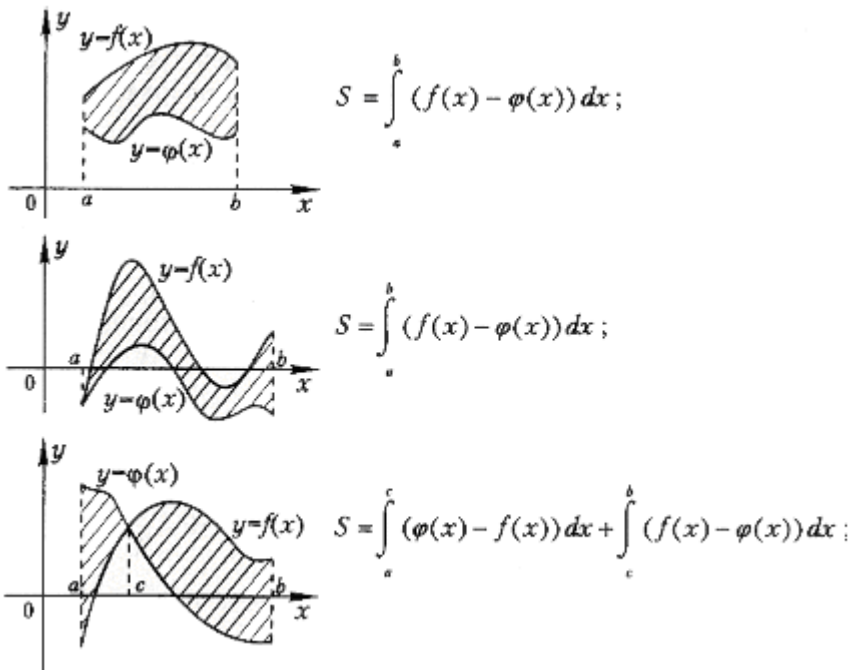
Використовуючи поняття визначеного інтеграла, можна обчислювати площі плоских фігур. Як відомо, визначений інтеграл від невід'ємної неперервної функції є площа відповідної криволінійної трапеції. У цьому полягає геометричний зміст визначеного інтеграла, на цьому ґрунтується його застосування для обчислення площ плоских фігур.

1. Площа фігури, обмеженої графіком неперервної від'ємної на проміжку $[a; b]$ функції $f(x)$, віссю Ox та прямими $x=a$ и $x=b$:

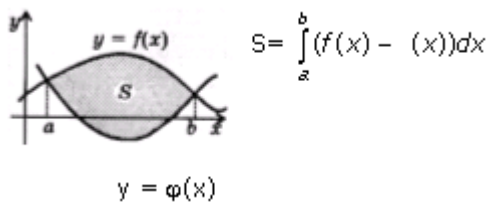


$$S = - \int_a^b f(x)dx$$

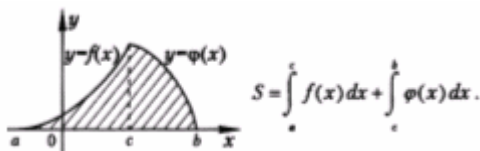
2. Площа фігури, обмеженої графіком неперервної функції $f(x)$, $\varphi(x)$ та прямими $x=a$, $x=b$:



3. Площа фігури, обмеженої графіками неперервних функцій $f(x)$ і $\varphi(x)$:



4. Площа фігури, обмеженої графіком неперервної функції $f(x)$, $\varphi(x)$ та віссю Ox :

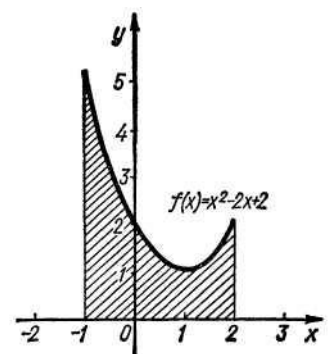


Розв'язування типових завдань.

Приклад 1. Обчислити площу плоскої фігури, обмеженої лініями $y = f(x) = x^2 - 2x + 2$, $x = -1$, $x = 2$ і відрізком $[-1; 2]$ осі Ox .

Розв'язання. Ця плоска фігура являє собою криволінійну трапецію, тому її площу обчислюють за формулою (1):

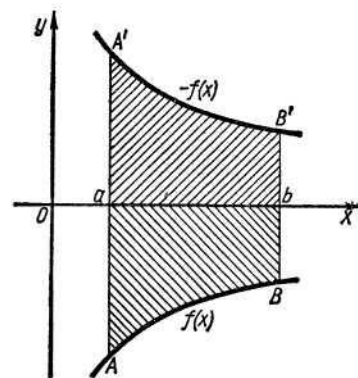
$$S = \int_{-1}^2 (x^2 - 2x + 2) dx = \left. \frac{x^3}{3} - x^2 + 2x \right|_{-1}^2 = 6.$$



Нехай тепер функція $y = f(x)$, $x \in [a; b]$, - не додатна неперервна функція. У цьому разі графік цієї функції лежить під віссю Ox і

$$S = \int_a^b f(x) dx \leq 0.$$

Розглянувши допоміжну функцію $y = -f(x)$, $x \in [a; b]$, дістанемо, що площа криволінійної трапеції $aA'B'b$, обмеженої графіком функції $y = -f(x)$, відрізком $[a; b]$ осі Ox , відрізками прямих $x = a$ і $x = b$ ($a < b$), обчислюється за формулою (1), тобто

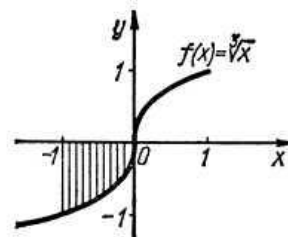


$$S = -\int_a^b f(x) dx \quad (2)$$

Розглянемо тепер криволінійну трапецію $aABb$ обмежену графіком функції $f(x)$, відрізком $[a; b]$ осі Ox , відрізками прямих $x = a$ і $x = b$ ($a < b$). Оскільки графік функції $y = -f(x)$ симетричний графіку функції $y = f(x)$ відносно осі Ox , то криволінійні трапеції $aABb$ і $aA'B'b$ рівні. Як відомо, рівні фігури мають рівні площі, тому площу криволінійної трапеції $aABb$ також обчислюватимемо за формулою (2).

Приклад 2. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y = f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x = -1$ і віссю Ox .

Розв'язання. Графік функції $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x \in [-1; 0]$ лежить під віссю Ox , тому для обчислення площі даної плоскої фігури застосовуємо формулу (2):



$$S = -\int_{-1}^0 \sqrt[3]{x} dx = -\frac{3}{4} x^{4/3} \Big|_{-1}^0 = \frac{3}{4}.$$

Нехай тепер $f(x)$, $x \in [a; b]$, - неперервна на відрізку $[a; b]$ функція, графік якої перетинає відрізок $[a; b]$ осі Ox в скінченному числі точок. З формул (1) і (2) випливає, що площу плоскої фігури, обмеженої графіком функції $f(x)$, відрізком $[a; b]$ осі Ox , відрізками прямих $x = a$ і $x = b$, обчислюють за формулою

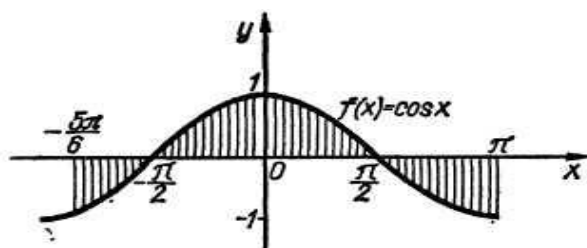
$$S = \int_a^b |f(x)| dx. \quad (3)$$

Приклад 3. Обчислити площу плоскої фігури, обмеженої відрізком $\left[-\frac{5\pi}{6}; \pi\right]$

осі Ox , графіком функції $f(x) = \cos x$, відрізками прямих $x = -\frac{5\pi}{6}$ і $x = \pi$

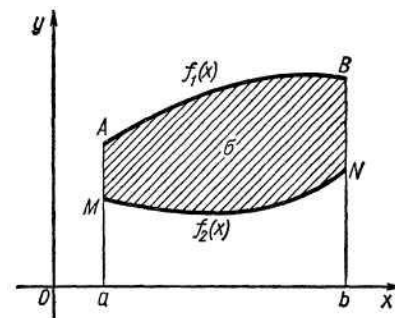
Розв'язання. Розв'язавши рівняння $\cos x = 0$, дістанемо, що графік функції $y = \cos x$ на відрізку $\left[-\frac{5\pi}{6}; \pi\right]$ перетинає вісь Ox у точках

$x_1 = -\frac{\pi}{2}$, $x_2 = \frac{\pi}{2}$. Отже, за формулою



$$(3) S = \int_{-5\pi/6}^{\pi} |\cos x| dx = - \int_{-5\pi/6}^{-\pi/2} \cos x dx + \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x dx = -\sin x \Big|_{-5\pi/6}^{-\pi/2} + \sin x \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} - \sin x \Big|_{\pi/2}^{\pi} = \frac{7}{2}$$

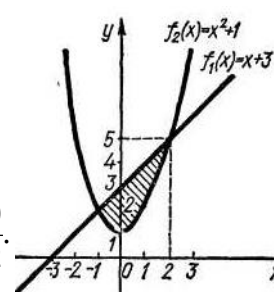
Розглянемо тепер фігуру σ , обмежену відрізками прямих $x=a$ і $x=b$ ($a < b$) і графіками невід'ємних неперервних функцій $f_1(x)$, $x \in [a; b]$, і $f_2(x)$, $x \in [a; b]$. Оскільки фігуру σ можна розглядати як різницю криволінійних трапецій $aABb$ і $aMNb$, то з урахуванням формули (1) дістанемо таку формулу для обчислення площі фігури σ :



$$S = \int_a^b f_1(x) dx - \int_a^b f_2(x) dx = \int_a^b (f_1(x) - f_2(x)) dx \quad (4)$$

Приклад 4. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $y = f_1(x) = x + 3$ і $y = f_2(x) = x^2 + 1$

Розв'язання. Розв'язавши рівняння $x + 3 = x^2 + 1$, знайдемо абсиси точок перетину графіків функцій f_1 і f_2 : $x_1 = -1$ і $x_2 = 2$. Використовуючи формулу (4), обчислимо площу фігури:



$$S = \int_{-1}^2 (x + 3 - (x^2 + 1)) dx = \int_{-1}^2 (-x^2 + x + 2) dx = -\frac{1}{3}x^3 \Big|_{-1}^2 + \frac{1}{2}x^2 \Big|_{-1}^2 + 2x \Big|_{-1}^2 = \frac{9}{2}.$$

Якщо треба обчислити площу складнішої плоскої фігури, то шукану площу намагаються виразити у вигляді алгебраїчної суми площ деяких криволінійних трапецій. Так, наприклад, площу фігури, зображеної на рисунку обчислюють за формулою

$$S = S_{aABb} - S_{aACc} - S_{cCBb}.$$

Нехай криві АВ, ВС і АС – відповідно графіки таких функцій: $y = f(x)$, $x \in [a; b]$, $y = \varphi(x)$

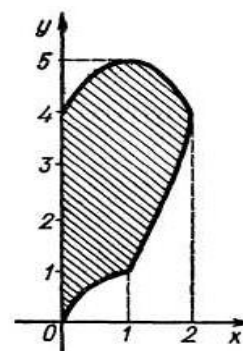
$x \in [a; c]$, і $y = \psi(x)$, $x \in [c; b]$. Тоді

$$S = \int_a^b f(x) dx - \int_a^c \varphi(x) dx - \int_c^b \psi(x) dx. \quad (5)$$

Приклад 5. Обчислити площу плоскої фігури, обмеженої лініями $y = \sqrt{x}$, $x \in [0; 1]$, $y = x^2$, $x \in [1; 2]$, і $y = -x^2 + 2x + 4$, $x \in [0; 2]$

Розв'язання. Для знаходження площі скористаємося формулою (5):

$$S = \int_0^2 (-x^2 + 2x + 4) dx - \int_0^1 \sqrt{x} dx - \int_1^2 x^2 dx = -\frac{x^3}{3} \Big|_0^2 + 2x \Big|_0^2 + 4x \Big|_0^2 - \frac{2}{3}x^{3/2} \Big|_0^1 - \frac{x^3}{3} \Big|_1^2 = \frac{19}{3}.$$



А тепер перейдемо до подвійного інтегралу.

Означення. Якщо $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(M_i) \cdot \Delta S_i$ існує та не залежить ні від

способу розбиття області D на частини, ні від вибору точок M_i , то ця границя називається *подвійним інтегралом від функції $z = f(x; y)$ по області D* і позначається так:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(M_i) \cdot \Delta S_i = \iint_D f(x; y) dS = \iint_D f(x; y) dx dy.$$

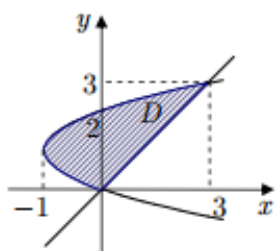
Отже, подвійний інтеграл є прямим узагальненням поняття звичайного визначеного інтеграла на випадок функції двох змінних.

Властивості подвійного інтеграла

1. $\iint_D c \cdot f(x; y) ds = c \iint_D f(x; y) ds.$
2. $\iint_D (f_1(x; y) \pm f_2(x; y)) ds = \iint_D f_1(x; y) ds \pm \iint_D f_2(x; y) ds.$
3. $\iint_D f(x; y) ds = \iint_{D_1} f(x; y) ds \pm \iint_{D_2} f(x; y) ds$, якщо $D = D_1 \cup D_2$, $D_1 \cap D_2 = \emptyset$.
4. $\iint_D ds = S$, S — площа області D .

П р и к л а д 3. Знайти площу фігури обмеженої лініями $x = y^2 - 2y$ і $x - y = 0$.

Розв'язування: Фігура, що має форму області D , обмежена параболою $x = y^2 - 2y$ і прямою $x - y = 0$.



Знайдемо ординати точок перетину даних ліній, розв'язуючи систему рівнянь:

$$\begin{cases} x = y^2 - 2y \\ x = y \end{cases} \Rightarrow y^2 - 3y = y(y - 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 0, \\ y_2 = 3. \end{cases}$$

Область D — правильна в напрямі осі Ox . Тому $D = \{0 \leq y \leq 3, y^2 - 2y \leq x \leq y\}$.

За формулою площі області маємо:

$$\begin{aligned} S &= \iint_D dx dy = \int_0^3 dy \int_{y^2-2y}^y dx = \int_0^3 (y - y^2 + 2y) dy = \int_0^3 (3y - y^2) dy = \\ &= \left(\frac{3y^2}{2} - \frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^3 = 27 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) = \frac{9}{2} = 4,5. \end{aligned}$$

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО ВИКОНАННЯ

Варіанти завдань розподіляються викладачем

В-1:

1) Обчислити (попередньо зробивши малюнок) площу фігури, обмеженої

параболою $y = -x^2 + 6x - 5$ та прямими $y = -\frac{1}{3}x - \frac{1}{2}$ $x = 1$, $x = 4$.

2) Подвійним інтегруванням знайти площу області, обмеженої параболою $y = \sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$ і прямою $x = 4$.

В-2:

1) Обчислити (попередньо зробивши малюнок) площу фігури, обмеженої лініями $y = \sqrt{x+2}$, $y = x$, $x = 7$.

2) Подвійним інтегруванням знайти площу частини конуса $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, яка вирізається циліндром $x^2 + y^2 = 2ax$.

В-3:

1) Обчислити (попередньо зробивши малюнок) площу фігури, обмеженої лініями $y = x^3$, $y = 8$, $y = 1$.

2) Подвійним інтегруванням обчислити площу області між кривими $\rho = 2\cos\varphi$, $\rho = 2(1 + \cos\varphi)$.

В-4:

1) Обчислити (попередньо зробивши малюнок) площу фігури, обмеженої лініями $y = 4x - x^2$, $y = 4 - x$.

2) За допомогою подвійного інтеграла, обчислити площу плоскої фігури, обмеженої лініями $y = \frac{4}{x}$, $y = 2$, $y = 4$, $y = x - 1$.

В-5:

1) Обчислити (попередньо зробивши малюнок) площу фігури, обмеженої лініями $y = x^2 - 2x + 2$, $y = 2 + 6x - x^2$.

2) За допомогою подвійного інтеграла, обчислити площу плоскої фігури, обмеженої лініями $y = e^x$, $y = e$, $x = 0$.

В-6:

1) Обчислити (попередньо зробивши малюнок) площу фігури, обмеженої лініями $y = \sin x$, $y = \frac{1}{2}$, $x = \frac{\pi}{6}$, $x = \frac{5\pi}{6}$.

2) За допомогою подвійного інтеграла, обчислити площу плоскої фігури, обмеженої лініями $y^2 = 2x + 4$, $y^2 = -\frac{1}{2}x + 4$.

В-7:

1) Обчислити (попередньо зробивши малюнок) площу фігури, обмеженої графіками функцій $y = \frac{1}{x}$ та $y = -x^2 + 4x - 2$.

2) За допомогою подвійного інтеграла, обчислити площу плоскої фігури, обмеженої лініями $y = x^2 - 1$, $x + y = 5$.

В-8:

1) Обчислити (попередньо зробивши малюнок) площу фігури, обмеженої кривими $y = \sqrt[3]{x}$, $y = -\log_2 x + 1$ і віссю абсцис.

2) Подвійним інтегруванням обчислити площу області, обмеженої лінією $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$.

Домашнє завдання: Данко П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. В. 2 ч. Ч. 1: Учеб. пособие для вузов. 6-е изд. М.: ООО «Издательский дом ОНИКС 21 век»: ООО «Издательство мир и Образование», 2005. – 304 с. : ил. – с. 259-260: №1642 - № 1644.