

Практичне заняття №2

Тема : Знаходження похідних. Дослідження функції та побудова графіка функції. Розв'язування задач прикладного змісту

Мета:

Навчальна: набуття навичок і вмінь досліджувати функції та будувати їх графіки використовуючи похідні

Розвиваюча: розвиток уявлення, пам'яті, творчого мислення.

Виховна: виховувати культуру мовного спілкування в ході бесіди, формувати спец лексику, активну громадянську позицію, навички самостійно приймати рішення; розвивати творчий та естетичний потенціал, критичне мислення студентів.

Тип заняття: формування та вдосконалення вмінь вмінь і навичок

Засоби навчання: підручник, роздатковий матеріал

Між предметні зв'язки: основи підприємництва, економіка с/г

Методи: пояснення, вправи

Кількість годин: 2

Література:

Базова:

1. Аналітична геометрія. Лінійна алгебра: Навчально-методичний посібник / Укл.: І.Д.Пукальський, І.П.Лусте. – Чернівці: Рута, 2007. – 244 с.
2. Вища математика для економістів. Конспект лекцій (І курс) / Уклад.: Ю. П. Буценко, О. О. Диховичний, О. А. Тимошенко. — К: НТУУ «КПІ», 2014. — 256 с.
3. Вища математика: навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. / В.П Дубовик., П. Юрик. - 4-те вид. - К. : Ігнатекс-Україна., 2013. - 648 с: іл. - (Вища школа). - Бібліогр.: с. 632-633.
4. Дюженкова Л. І., Дюженкова О. Ю., Михалін Г. О. Вища математика. Прикладні задачі. – К. : Видавничий центр «Академія», 2003.
5. Кривуца В. Г., Барковський В. В., Барковська Н. В. Вища математика: практикум. – К.: ЦУЛ, 2003.
6. Математика для економістів. Елементи лінійної алгебри: Методичні вказівки та завдання для типових розрахунків / Уклад.: В.М. Долгих, О.М. Назаренко. – Суми: УАБС НБУ, 2005. – 38 с.
7. Шеченко Р.Л. Основи вищої математики. – Біла Церква, 2005.

Допоміжна:

1. Валуце І. І. Математика для технікумів. – М. : наука, 1990.
2. Піскунов Н. С. Диференціальне числення. – Т.1,2. – М. : Наука, 1997.
3. Соколенко О. І. Вища математика: підручник. – К.: Видавничий центр «Академія», 2002.

Інформаційні ресурси

1. Вища математика для економістів
<http://matan.kpi.ua/public/files/%D0%92%D0%9C%D0%B4%D0%95.%D0%9A%D0%BE%D0%BD%D1%81%D0%BF%D0%B5%D0%BA%D1%82.pdf>
2. Высшая математика <https://www.kontrolnaya-rabota.ru/wow/vishaya-matematika/>
3. Лекции по высшей математике <http://www.toehelp.ru/theory/math/>

Структура заняття

1. Організаційна частина
2. Повідомлення теми, мети заняття
3. Актуалізація опорних знань
4. Мотивація навчальної діяльності
5. Закріплення вмінь, виконання типових завдань
6. Самостійна робота студентів
7. Підведення підсумків заняття
8. Повідомлення домашнього завдання

Контрольні запитання

1. У зв'язку з якими задачами виникає поняття похідної?
2. Дайте означення похідної.
3. Як за допомогою похідної встановлюють інтервали зростання і спадання функції?
4. Що таке опуклість функції вниз та вгору, точки перегину?
5. Як визначають характер опуклості функції за допомогою другої похідної?
6. Що таке асимптоти графіка функції?
7. Якими вони бувають? Як знаходити їх рівняння?
8. При розв'язуванні яких задач спецдисциплін вам «стануть у пригоді» похідні?

Практичне заняття № 2

Графік заданої функції можна будувати по довільних точках. Для цього обирають довільним чином деяку кількість точок. Чим більше кількість обраних точок, тим точніше буде зображено графік функції.

Одержані вище результати дозволяють спростити цю задачу шляхом обирання не довільних точок, а характерних саме для заданої функції.

Для науково обґрунтованого дослідження функції та побудови її графіка доцільно дотримуватись такої схеми:

Перший етап (використання виду заданої функції)

1. Знаходимо область визначення функції, точки розриву, інтервали неперервності.
2. Досліджуємо функцію на парність чи непарність, періодичність.
3. Знаходимо асимптоти графіка функції.
4. Знаходимо точки перетину графіка функції з осями координат.

Другий етап (використання похідної першого порядку)

5. Знаходимо критичні точки першого роду, інтервали зростання та спадання функції, точки екстремумів та екстремальні значення функції.

Третій етап (використання похідної другого порядку).

6. Знаходимо критичні точки другого роду, інтервали опуклості та угнутості графіка функції, точки перегину та значення функції в точках перегину.

Четвертий етап.

7. Згідно з результатами дослідження будуємо у системі координат отримані точки, асимптоти і будуємо графік функції з урахуванням інтервалів неперервності, зростання та спадання, опуклості та угнутості, асимптот графіка.

Розглянемо на прикладі.

Дослідити функцію $y = \frac{2x-1}{(x-1)^2}$ та побудувати її графік.

Приклад 1.

Розв'язання. Задана функція має розрив в точці $x=1$, тому $(-\infty, 1) \cup (1, \infty)$ область неперервності цієї функції.

Задана функція не буде парною або непарною.

Знайдемо асимптоти графіка функції. Однобічні границі функції в точці розриву будуть

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{2x-1}{(x-1)^2} = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{2x-1}{(x-1)^2} = \infty.$$

Отже, пряма $x=1$ є вертикальна асимптота. Перевіримо, чи має ця функція похилі асимптоти:

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x-1}{x(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3}}{1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} = 0.$$

Отже, похилих асимптот не має. Шукаємо горизонтальні асимптоти:

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x-1}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}} = 0.$$

Тому пряма $y=0$ буде горизонтальною асимптотою.

Тепер знайдемо точки перетину графіка функції з осями координат:

при $x=0$ маємо $y=-1$, тобто точку $M_0(0, -1)$;

при $y=0$ одержуємо $x=\frac{1}{2}$; тобто точку $M_1(\frac{1}{2}, 0)$.

Переходимо до другого етапу дослідження.

Похідна функція буде

$$y' = \frac{2(x-2)^2 - 2(x-1)(2x-1)}{(x-1)^4} = \frac{2x-2-4x+2}{(x-1)^3} = \frac{-2x}{(x-1)^3}.$$

Похідна не існує в точці $x = 1$ і дорівнює нулю при $x = 0$. Отже, критичною точкою першого роду буде лише точка $x = 0$ тому, що $x = 1$ не належить області визначення функції.

Складемо таблицю з врахуванням точки розриву та критичної точки.

Таблиця

x	$(-\infty, 0)$	$x = 0$	$(0, 1)$	$x = 1$	$(1, \infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	<i>не існує</i>	$-$
$f(x)$	$\searrow$	$\min$	$\nearrow$	<i>не існує</i>	$\searrow$

Отже, на інтервалі $(0, 1)$ функція зростає, а в інтервалах $(-\infty, 0)$ та $(1, \infty)$ – спадає.

Екстремальним значенням функції буде

$$y_{\min} = f(0) = -1.$$

Знайдемо інтервали опуклості та угнутості графіка, точку перегину за відповідною схемою: друга похідна має вигляд

$$y'' = \frac{2(2x+1)}{(x-1)^4}.$$

Звідси знаходимо критичні точки другого роду:

$x = -\frac{1}{2}$ та $x = 1$, але точка $x = 1$ не належить області визначення функції.

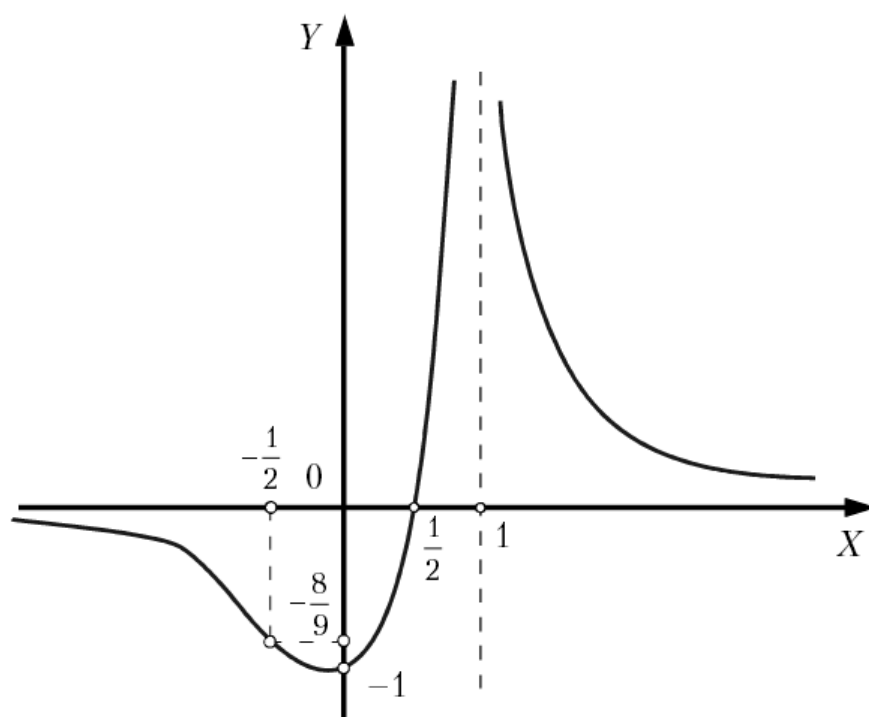
Складаємо таблицю з врахуванням точки розриву та $x = -\frac{1}{2}$.

Таблиця

x	$\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$	$x = -\frac{1}{2}$	$\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$	$x = 1$	$(1, \infty)$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	<i>не існує</i>	$+$
$f(x)$		<i>точка перетину</i>		<i>не існує</i>	

Отже, на інтервалі $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$ графік функції опуклий, а в інтервалах $\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$ та $(1, \infty)$ графік угнутий.

Значення функції в точці перегину буде $y_{\text{пер}} = f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{8}{9}$.



За одержаними результатами будемо графік заданої функції

Розглянемо приклад використання похідної в економічних задачах.

В багатьох задачах суттєву роль грає еластичність попиту. Ознайомимось з поняттям еластичності та деякими застосуваннями її.

Нехай p – вартість одного виробу, а x – кількість виробів, що виготовлена та продана за деякий певний інтервал часу. Нехай $x = f(p)$. Еластичність попиту позначають літерою η (ета) і визначають так:

$$\eta = \frac{p}{x} \times \frac{dx}{dp} = \frac{pf'(p)}{f(p)}.$$

Дамо пояснення еластичності попиту η . Якщо вартість виробу зросте з p до $p + \Delta p$, тоді і кількість виробів також зміниться на величину $\Delta x = f(p + \Delta p) - f(p)$. Відносний приріст вартості буде

$\frac{\Delta p}{p}$, а відносний приріст функції попиту буде $\frac{\Delta x}{x}$. Якщо відносний приріст помножити на 100, то одержимо відповідний відсоток змін початкової вартості та початкового попиту.

Наприклад, початкова вартість одного виробу 2 гривні зросла до 2,1 гривень, тоді $\Delta p = 2,1 - 2 = 0,10$ гривні. Отже, відносна вартість

$\frac{\Delta p}{p} = 0,05$ вказує зростання початкової вартості. Якщо цю величину помножити на 100, то одержимо відсоток зміни початкової вартості кожного виробу:

$$100 \cdot \frac{\Delta p}{p} = 100 \cdot 0,05 = 5\%.$$

Аналогічно $100 \cdot \frac{\Delta x}{x}$ дорівнює відсотку зміни початкового попиту.

Якщо зростання вартості p викликає спад попиту, тоді $\Delta x < 0$.

Розглянемо відношення відносного приросту попиту до відносного приросту вартості одиниці продукції

$$\frac{\Delta x}{x} : \frac{\Delta p}{p} = \frac{p \Delta x}{x \Delta p}.$$

Це співвідношення показує, в скільки разів відносний приріст попиту більше відносного приросту вартості кожного виробу.

Якщо в останній рівності перейти до границі при $\Delta p \rightarrow 0$, то одержимо:

$$\eta = \frac{p}{x} \times \frac{dx}{dp} = \lim_{\Delta p \rightarrow 0} \frac{p \Delta x}{x \Delta p}.$$

Оскільки границя η відрізняється від виразу $\frac{p \Delta x}{x \Delta p}$ на нескінченно малу більшого порядку малості відносно $\Delta p \rightarrow 0$, то $\eta \approx \frac{p \Delta x}{x \Delta p}$, або відсоток зміни попиту $\approx \eta$. (Відсоток зміни вартості).

Наприклад, якщо зростання вартості на 2% викликає спадання попиту на 3%, тоді еластичність попиту буде $\eta = \frac{-3}{2} = -1,5$.

Якщо еластичність попиту $\eta = -0,5$, тоді 4% зростання вартості викликає зміну попиту на $(-0,5) \cdot 4\% = -2\%$.

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО ВИКОНАННЯ

Варіанти завдань розподіляються викладачем

1. Провести повне дослідження заданої функції та побудувати її графік:

В-1 $y = \frac{1}{x - N};$

В-4 $y = \frac{x + 1}{x - N};$

В-7 $f(x) = \frac{2x + 1}{x + N};$

В-2 $y = \frac{x^2 - N^2}{x^2 + 1};$

В-5 $y = \frac{x^2 + 1}{x^2 - N^2};$

В-8 $y = e^{-2Nx};$

В-3 $y = \frac{e^x}{x};$

В-6 $y = -\ln x.$

2. Розв'язати задачі.

В-1 Кількість хворих під час епідемії грипу в 1996 р. змінювалась з часом t (вимірюється днями) з початку вакцинації населення за законом

$$p(t) = \frac{200t}{t^2 + 100}.$$

Знайти час максимуму захворювань, інтервали зростання та спадання епідемії.

В-2 Температура повітря на протязі декількох днів змінювались за законом

$$T(t) = 24e^{-\left(t-\frac{1}{8}\right)^2}, \quad 0 \leq t \leq 16.$$

де t – час вимірювання температури. Побудувати графік цієї функції.

В-3 Промислова продукція держави на протязі t років, після 1990 р., змінювалась за законом

$$y = 500 \cdot \left(1 + 215e^{-0,07t}\right)^{-1}.$$

Коли випуск продукції зростав, а коли спадав?

В-5 Зміна населення держави з часом t здійснюється за законом

$$p(t) = \frac{A}{1 + Be^{-t}},$$

де A та B – постійні величини. Знайти значення t , при якому швидкість зростання населення максимальна. Чому дорівнює ця максимальна швидкість?

2 Знайти еластичність попиту та вказати стан доходу відповідного підприємства при $p = 5$ та $p = 15$, якщо заданий зв'язок між кількістю виготовлених та проданих виробів x та вартості кожного виробу p .

В-6 $x = \frac{N}{p^n};$

В-7 $x = (50 + 5N) \cdot (4 - \sqrt{p});$

В-8 $x = (400 + 4N) - 100p;$