

Практичне заняття №1

Тема: Розв'язування систем лінійних рівнянь основними методами.
Прикладні задачі курсів спецдисциплін, які приводять до систем лінійних рівнянь, та їх розв'язання

Мета:

Навчальна: набуття навичок і вмінь розв'язувати системи лінійних рівнянь основними методами

Розвиваюча: розвиток уявлення, пам'яті, творчого мислення.

Виховна: виховувати культуру мовного спілкування в ході бесіди, формувати спец лексику, активну громадянську позицію, навички самостійно приймати рішення; розвивати творчий та естетичний потенціал, критичне мислення студентів.

Тип заняття: формування та вдосконалення вмінь вмінь і навичок

Засоби навчання: підручник, роздатковий матеріал

Між предметні зв'язки: основи підприємництва, економіка с/г

Методи: пояснення, вправи

Кількість годин: 2

Література:

Базова:

1. Аналітична геометрія. Лінійна алгебра: Навчально-методичний посібник / Укл.: І.Д.Пукальський, І.П.Лусте. – Чернівці: Рута, 2007. – 244 с.
2. Вища математика для економістів. Конспект лекцій (І курс) / Уклад.: Ю. П. Буценко, О. О. Диховичний, О. А. Тимошенко. — К: НТУУ «КПІ», 2014. — 256 с.
3. Вища математика: навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. / В.П Дубовик., П. Юрик. - 4-те вид. - К. : Ігнатекс-Україна., 2013. - 648 с: іл. - (Вища школа). - Бібліогр.: с. 632-633.
4. Дюженкова Л. І., Дюженкова О. Ю., Михалін Г. О. Вища математика. Прикладні задачі. – К. : Видавничий центр «Академія», 2003.
5. Кривуца В. Г., Барковський В. В., Барковська Н. В. Вища математика: практикум. – К.: ЦУЛ, 2003.
6. Математика для економістів. Елементи лінійної алгебри: Методичні вказівки та завдання для типових розрахунків / Уклад.: В.М. Долгих, О.М. Назаренко. – Суми: УАБС НБУ, 2005. – 38 с.
7. Шеченко Р.Л. Основи вищої математики. – Біла Церква, 2005.

Допоміжна:

1. Валуце І. І. Математика для технікумів. – М. : наука, 1990.
2. Піскунов Н. С. Диференціальне числення. – Т.1,2. – М. : Наука, 1997.
3. Соколенко О. І. Вища математика: підручник. – К.: Видавничий центр «Академія», 2002.

Інформаційні ресурси

1. Вища математика для економістів
<http://matan.kpi.ua/public/files/%D0%92%D0%9C%D0%B4%D0%95.%D0%9A%D0%BE%D0%BD%D1%81%D0%BF%D0%B5%D0%BA%D1%82.pdf>
2. Высшая математика <https://www.kontrolnaya-rabota.ru/wow/vishaya-matematika/>
3. Лекции по высшей математике <http://www.toehelp.ru/theory/math/>

Структура заняття

1. Організаційна частина
2. Повідомлення теми, мети заняття
3. Актуалізація опорних знань
4. Мотивація навчальної діяльності
5. Закріплення вмінь, виконання типових завдань
6. Самостійна робота студентів
7. Підведення підсумків заняття
8. Повідомлення домашнього завдання

Контрольні запитання

1. Як записується СЛАР у векторно-матричній формі?
2. У чому полягає матричний метод розв'язання СЛАР? Які його недоліки?
3. У чому полягає метод Крамера розв'язання СЛАР? Сформулюйте теорему Крамера. Чому метод Крамера можна використовувати не для всіх СЛАР?
4. Сформулюйте теорему Кронекера-Капеллі.
5. У чому полягають прямий та зворотній ходи метода Гаусса?
6. У чому полягає особливість методу Йордана-Гаусса?
7. Що таке арифметичний n -вимірний простір, лінійний простір?
8. Що таке лінійна залежність та незалежність елементів лінійного простору (векторів)? Наведіть приклади
9. Що таке базис простору та координати його елемента? Наведіть приклади.
10. Що таке частинний та загальний розв'язки СЛАР? Чому ОСЛАР завжди сумісна? Яка структура загальних розв'язків ОСЛАР та СЛАР?
11. Що таке власний вектор та власне число матриці? Як їх шукають?

Практичне заняття №1

П р и к л а д : Розв'язати систему лінійних рівнянь за правилом Крамера та матричним методом:

$$\begin{cases} 2x + 7y + z = -17, \\ 7x + 3y + 5z = 8, \\ 3x + 2y + 6z = 9. \end{cases}$$

Розв'язання:

а) Розв'яжемо систему лінійних рівнянь за правилом Крамера. Для цього обчислимо головний визначник системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 7 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot 6 + 1 \cdot 7 \cdot 2 + 7 \cdot 5 \cdot 3 - 1 \cdot 3 \cdot 3 - 2 \cdot 5 \cdot 2 - 7 \cdot 7 \cdot 6 =$$
$$= 36 + 14 + 105 - 9 - 20 - 294 = -168.$$

Так як $\Delta \neq 0$, то система має єдиний розв'язок.

Обчислимо додаткові визначники, замінюючи по черзі перший, другий та третій стовбець головного визначника стовбцем вільних елементів:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -17 & 7 & 1 \\ 8 & 3 & 5 \\ 9 & 2 & 6 \end{vmatrix} = (-17) \cdot 3 \cdot 6 + 8 \cdot 2 \cdot 1 + 7 \cdot 5 \cdot 9 - 1 \cdot 3 \cdot 9 - 2 \cdot 5 \cdot (-17) - 8 \cdot 7 \cdot 6 =$$
$$= -306 + 16 + 315 - 27 + 170 - 336 = -168;$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & -17 & 1 \\ 7 & 8 & 5 \\ 3 & 9 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot 8 \cdot 6 + 7 \cdot 9 \cdot 1 + 3 \cdot (-17) \cdot 5 - 1 \cdot 8 \cdot 3 - 2 \cdot 5 \cdot 9 - 7 \cdot 6 \cdot (-17) =$$
$$= 96 + 63 - 255 - 24 - 90 + 714 = 504;$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & 7 & -17 \\ 7 & 3 & 8 \\ 3 & 2 & 9 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot 9 + 7 \cdot 8 \cdot 3 + 7 \cdot 2 \cdot (-17) - (-17) \cdot 3 \cdot 3 - 2 \cdot 2 \cdot 8 - 7 \cdot 7 \cdot 9 =$$
$$= 54 + 168 - 238 + 153 - 32 - 441 = -336.$$

Визначимо корені системи рівнянь за формулами Крамера:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-168}{-168} = 1; \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{504}{-168} = -3; \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{-336}{-168} = 2.$$

Отже, $\{1; -3; 2\}$ – шуканий розв'язок системи лінійних рівнянь.

б) Розв'яжемо систему лінійних рівнянь матричним методом, скориставшись

формулою:
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} A^* \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix},$$

де Δ – головний визначник системи,

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & 7 & -17 \\ 7 & 3 & 8 \\ 3 & 2 & 9 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot 9 + 7 \cdot 8 \cdot 3 + 7 \cdot 2 \cdot (-17) - (-17) \cdot 3 \cdot 3 - 2 \cdot 2 \cdot 8 - 7 \cdot 7 \cdot 9 =$$

$$= 54 + 168 - 238 + 153 - 32 - 441 = -336.$$

Визначимо корені системи рівнянь за формулами Крамера:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-168}{-168} = 1; \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{504}{-168} = -3; \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{-336}{-168} = 2.$$

Отже, $\{1; -3; 2\}$ – шуканий розв’язок системи лінійних рівнянь.

б) Розв’яжемо систему лінійних рівнянь матричним методом, скориставшись

формулою:
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} A^* \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix},$$

де Δ – головний визначник системи,

A^* – зведена матриця, $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ – стовбець вільних елементів.

З попередніх обчислень головний визначник системи дорівнює $\Delta = -168$.

Обчислимо математичні доповнення до кожного елемента матриці за

формулою: $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 3 \cdot 6 - 5 \cdot 2 = 18 - 10 = 8;$$

$$A_{12} = - \begin{vmatrix} 7 & 5 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = -(7 \cdot 6 - 5 \cdot 3) = -(42 - 15) = -27;$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 7 \cdot 2 - 3 \cdot 3 = 14 - 9 = 5;$$

$$A_{21} = - \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = -(7 \cdot 6 - 1 \cdot 2) = -(42 - 2) = -40;$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot 6 - 1 \cdot 3 = 12 - 3 = 9;$$

$$A_{23} = - \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -(2 \cdot 2 - 7 \cdot 3) = -(4 - 21) = 17;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 7 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 7 \cdot 5 - 1 \cdot 3 = 35 - 3 = 32;$$

$$A_{32} = - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = -(2 \cdot 5 - 1 \cdot 7) = -(10 - 7) = -3;$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 - 7 \cdot 7 = 6 - 49 = -43.$$

$$A_{32} = - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = -(2 \cdot 5 - 1 \cdot 7) = -(10 - 7) = -3;$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 - 7 \cdot 7 = 6 - 49 = -43.$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{-168} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 40 & 32 \\ -27 & 9 & -3 \\ 5 & 17 & -43 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -17 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} = \frac{1}{-168} \cdot \begin{pmatrix} 8 \cdot (-17) - 40 \cdot 8 + 32 \cdot 9 \\ (-27) \cdot (-17) + 9 \cdot 8 + (-3) \cdot 9 \\ 5 \cdot (-17) + 17 \cdot 8 + (-43) \cdot 9 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{-168} \cdot \begin{pmatrix} -136 - 320 + 288 \\ 459 + 72 - 27 \\ -85 + 136 - 387 \end{pmatrix} = \frac{1}{-168} \cdot \begin{pmatrix} -168 \\ 504 \\ -336 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Отже, $\{1; -3; 2\}$ – шуканий розв’язок системи лінійних рівнянь.

Відповідь: $\{1; -3; 2\}$.

Розглянемо одну із прикладних задач, що приводять до систем лінійних рівнянь, та її розв’язання, а саме, задачу знаходження коефіцієнтів повних та непрямих витрат, плану та програми виробництва.

Підприємство складається з трьох цехів, кожен з яких виробляє один вид продукції. Прямі витрати одиниць i -го цеха, що використовуються (проміжний продукт) для випуску одиниці виробу продукції j -го цеха, а також кількість одиниць продукції i -го цеха, призначених до реалізації (кінцевий продукт), задані у таблиці:

Продукція цехів	Прямі витрати			Кінцевий продукт
	1	2	3	
1	0	0,2	0	200
2	0,2	0	0,1	100
3	0	0,1	0,2	300

Визначити:

- 1) коефіцієнти повних витрат;
- 2) план (валовий випуск) кожного цеха;
- 3) виробничу програму цехів;
- 4) коефіцієнти непрямих (посередницьких) витрат.

Розв’язання.

Таблицею задана матриця витратних коефіцієнтів

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0,2 & 0 \\ 0,2 & 0 & 0,1 \\ 0 & 0,1 & 0,2 \end{pmatrix}$$

Позначимо: виробничу програму підприємства X , де

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

(x_1, x_2, x_3 – плани валового випуску продукції цехів); валовий випуск товарної продукції Y , де

$$Y = \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \\ 300 \end{pmatrix}.$$

Виробничі взаємні зв'язки підприємства задовольняють умовам

$$\begin{cases} x_1 - (0 \cdot x_1 + 0,2 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3) = 200 \\ x_2 - (0,2 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0,1 \cdot x_3) = 100 \\ x_3 - (0 \cdot x_1 + 0,1 \cdot x_2 + 0,2 \cdot x_3) = 300 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - 0,2x_2 = 200 \\ -0,2x_1 + x_2 - 0,1x_3 = 100 \\ -0,1x_2 + 0,8x_3 = 300 \end{cases} \quad (1)$$

У матричному вигляді: $X - AX = Y \Rightarrow EX - AX = Y \Rightarrow (E - A)X = Y$, де E – одинична матриця.

Позначимо $E - A = B$. Тоді система лінійних алгебраїчних рівнянь (1) у матричному вигляді буде

$$BX = Y, \quad (2)$$

$$\text{причому } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0,2 & 0 \\ 0,2 & 0 & 0,1 \\ 0 & 0,1 & 0,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -0,2 & 0 \\ -0,2 & 1 & -0,1 \\ 0 & -0,1 & 0,8 \end{pmatrix}.$$

Елементи матриці B^{-1} – це коефіцієнти повних витрат. Тому, щоб задовольнити першу вимогу задачі, треба знайти B^{-1} . Матриця B квадратна 3-го порядку, її визначник $|B| = 0,8 - 0,01 - 0,032 = 0,758$. Тому B^{-1} існує і систему (1) можна розв'язати матричним методом.

Для знаходження матриці B^{-1} знайдемо алгебраїчні доповнення до елементів матриці B :

$$B_{11} = 0,79; B_{21} = 0,16; B_{31} = 0,02;$$

$$B_{12} = 0,16; B_{22} = 0,8; B_{32} = 0,1;$$

$$B_{13} = 0,02; B_{23} = 0,1; B_{33} = 0,96.$$

Отже, оберненою до B матрицею буде

$$B^{-1} = \frac{1}{0,758} \begin{pmatrix} 0,79 & 0,16 & 0,02 \\ 0,16 & 0,8 & 0,1 \\ 0,02 & 0,1 & 0,96 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,04 & 0,21 & 0,03 \\ 0,21 & 1,05 & 0,13 \\ 0,03 & 0,13 & 1,27 \end{pmatrix}.$$

1. Коефіцієнти повних витрат знайдені (це елементи матриці B^{-1}).

2. Знайдемо розв'язок системи (1) матричним методом:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = B^{-1}Y = \begin{pmatrix} 1,04 & 0,21 & 0,03 \\ 0,21 & 1,05 & 0,13 \\ 0,03 & 0,13 & 1,27 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \\ 300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 238 \\ 186 \\ 400 \end{pmatrix}.$$

Отже, плани валового випуску продукції: для першого цеху

$x_1 = 238$, для другого – $x_2 = 186$, для третього – $x_3 = 400$.

3. Визначимо виробничу програму кожного цеха використовуючи витратні коефіцієнти a_{ij} (елементи матриці A) та співвідношення:

$$x_{11} = a_{11} \cdot x_1 = 0 \cdot 238 = 0$$

$$x_{13} = a_{13} \cdot x_3 = 0 \cdot 400 = 0$$

$$x_{22} = a_{22} \cdot x_2 = 0 \cdot 186 = 0$$

$$x_{31} = a_{31} \cdot x_2 = 0 \cdot 186 = 0$$

$$x_{33} = a_{33} \cdot x_1 = 0,2 \cdot 400 = 80$$

$$x_{12} = a_{12} \cdot x_2 = 0,2 \cdot 186 = 37,2 \approx 37$$

$$x_{21} = a_{21} \cdot x_2 = 0,2 \cdot 238 = 47,6 \approx 48$$

$$x_{23} = a_{23} \cdot x_3 = 0,1 \cdot 400 = 40$$

$$x_{32} = a_{32} \cdot x_2 = 0,1 \cdot 186 = 18,6 \approx 19$$

Таким чином одержали:

4. Коефіцієнти непрямих (посередницьких) витрат C_{ij} (елементи матриці C) визначаються як різниці повних внутрішньовиробничих витрат (елементи матриці B^{-1}) та прямих витрат (елементи a_{ij} матриці A). У матричному вигляді матриця коефіцієнтів непрямих витрат буде:

$$C = B^{-1} - A = \begin{pmatrix} 1,04 & 0,21 & 0,03 \\ 0,21 & 1,05 & 0,13 \\ 0,03 & 0,13 & 1,27 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0,2 & 0 \\ 0,2 & 0 & 0,1 \\ 0 & 0,1 & 0,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,04 & 0,01 & 0,03 \\ 0,01 & 1,05 & 0,03 \\ 0,03 & 0,03 & 1,07 \end{pmatrix}.$$

ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО ВИКОНАННЯ

Розв'язати систему лінійних рівнянь за правилом Крамера та матричним методом.

$$1. \begin{cases} 2x - 3y + z = -6, \\ 3x + 3y - 2z = 20, \\ 5x - 6y + 4z = -12. \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 2x + 5y + 9z = -20, \\ 9x - 7y + 3z = 1, \\ 6x + 4y + 7z = -2; \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} x + y + z = -2, \\ 2x + 3y - z = 1, \\ x - y + 2z = -7. \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} 3x + 2y + 4z = -3, \\ 2x - 3y + z = -4, \\ 4x - 5y - 2z = 10; \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} 2x + 5y - 2z = 9, \\ 4x + y - 4z = 9, \\ x + y - 4z = 9; \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 2x + 3y + z = 0, \\ 2x + y + 3z = 4, \\ 3x + 2y + z = 2. \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} 4x - 2y + 3z = -9, \\ 3x + 5y - 4z = 25, \\ 7x + 2y + 3z = 2; \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} 3x + 4y + 2z = -5, \\ 2x - 4y + 3z = 20, \\ 4x - 3y - 5z = 3; \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} x + 2y + 3z = -2, \\ 3x + 4y - 2z = -17, \\ 2x + 3y + z = -9; \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} x - y + z = 3, \\ 2x + y + z = 1, \\ x + y + 2z = 8. \end{cases}$$

/Завдання обирається за останньою цифрою номера студента в списку.

Наприклад, студенти за номерами 3, 13 та 23 розв'язують систему №3./