ЗАНЯТТЯ № 9

Тема: ***Означення функції багатьох змінних, їх диференційованість***

Мета:

Навчальна: познайомити студентів з поняттям функції багатьох змінних, їх диференційованістю

Розвиваюча: розвиток уявлення, пам'яті, творчого мислення.

Виховна: виховувати культуру мовного спілкування в ході бесіди, формувати спец лексику, активну громадянську позицію, навики самостійно приймати рішення; розвивати творчий та естетичний потенціал, критичне мислення студентів.

Тип заняття: засвоєння нових знань

Засоби навчання: підручник, комп'ютерні презентації

Між предметні зв'язки: основи підприємництва, економіка с/г

Методи: лекція, пояснення, демонстрування

Обладнання: комп'ютер, проектор

Кількість годин: 2

Література:

Базова:

1. Аналітична геометрія. Лінійна алгебра: Навчально-методичний посібник /Укл.: І.Д.Пукальський, І.П.Лусте. –Чернівці: Рута, 2007. – 244 с.

2. Вища математика для економістів. Конспект лекцій (І курс) / Уклад.: Ю. П. Буценко, О. О. Диховичний, О. А. Тимошенко. — К: НТУУ «КПІ», 2014. — 256 с.

3. Вища математика: навч. посіб. для студ. вищ. навч. зак. / В.П Дубовик., ІІ. Юрик. - 4-те вид. - К. : Ігнатекс-Україна., 2013. - 648 с: іл. - (Вища школа). - Бібліогр.: с. 632-633.

4. Дюженкова Л. І., Дюженкова О. Ю., Михалін Г. О. Вища математика. Прикладні задачі. – К. : Видавничий центр «Академія», 2003.

5. Кривуца В. Г., Барковський В. В., Барковська Н. В. Вища математика: практикум. – К.: ЦУЛ, 2003.

6. Математика для економістів. Елементи лінійної алгебри: Методичні вказівки та завдання для типових розрахунків / Уклад.: В.М. Долгіх, О.М. Назаренко. − Суми: УАБС НБУ, 2005. − 38 с.

7. Шеченко Р.Л. Основи вищої математики. − Біла Церква, 2005.

Допоміжна:

1. Валуце І. І. Математика для технікумів. – М. : наука, 1990.

2. Піскунов Н. С. Диференціальне числення. – Т.1,2. – М. : Наука, 1997.

3. Соколенко О. І. Вища математика: підручник. – К.: Видавничий центр «Академія», 2002.

Інформаційні ресурси

1. Вища математика для економістів http://matan.kpi.ua/public/files/%D0%92%D0%9C%D0%B4%D0%95.%D0%9A%D0%BE%D0%BD%D1%81%D0%BF%D0%B5%D0%BA%D1%82.pdf
2. Высшая математика https://www.kontrolnaya-rabota.ru/wow/vishaya-matematika/
3. Лекции по висшей математике http://www.toehelp.ru/theory/math/

Структура заняття

1. Організаційна частина.
2. Повідомлення теми, формування мети та основних завдань
3. Актуалізація опорних знань.
4. Мотивація навчальної діяльності
5. Значення теми для майбутньої діяльності; вивчення інших тем і дисциплін, повсякденних справ
6. План заняття
   1) Початкові поняття теорії функцій багатьох змінних.
   2) Похідні та диференціали функцій багатьох змінних.
7. Підведення підсумків
   - узагальнення матеріалу викладачем
   - повідомлення домашнього завдання

Контрольні запитання

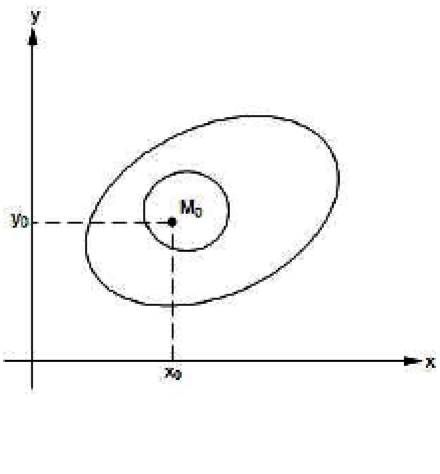
1. В яких задачах використовуються функції багатьох змінних? Наведіть приклади.
2. Сформулюйте означення області визначення, границі та неперервності функції багатьох змінних.
3. Що таке лінії рівня та графік для функції двох змінних?
4. Що таке частинні похідні функції багатьох змінних?
5. За якими правилами їх знаходять?

1) Початкові поняття теорії функцій багатьох змінних.

На практиці часто доводиться зустрічатись з ситуаціями, коли функціональна залежність вимагає врахування більше ніж одного аргументу. Наприклад, попит на товар, як правило, залежить не тільки від його ціни, але й від ціни конкуруючого товару, добробуту покупців та ін., об'єм випуску продукції визначається вкладеними фінансовими, людськими, технологічними ресурсами. Дослідження таких залежностей вимагає подальшого розвитку нашого математичного апарату – запровадження функцій багатьох змінних.

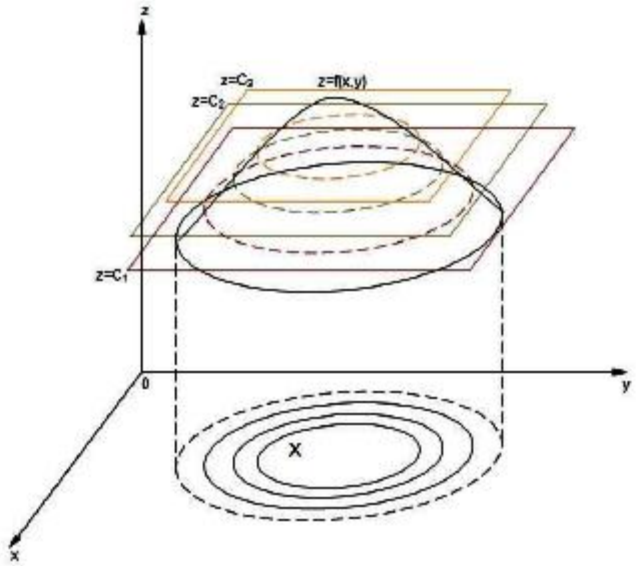
Нехай $x = \{x_1, \ldots, x_n\}$ - елемент n - вимірного простору R^n і кожному такому елементу з деякої множини X поставлено у відповідність певне число u , тоді кажуть, що задано функцію n - змінних $u = f(M) = f(x_1, \ldots, x_n)$.

При цьому $x_1, \ldots, x_n$ x - називаються незалежними змінними або аргументами, u - залежною змінною, символ f означає функціональну залежність, X - область визначення функції. Надалі, в основному обмежимось розглядом функції двох змінних $u = f(x_1, x_2)$ або $z = f(x, y)$, що дозволяє аналізувати основні властивості функцій багатьох змінних, уникаючи при цьому надмірної громіздкості у міркуваннях. В такому випадку X є підмножина координатної площини Oxy околом точки $M_0(x_0, y_0)$ – є круг, для якого ця точка – внутрішня (мал. 1)



Мал. 1

Графіком функції $z = f(x,y)$ називається множина точок тривимірного простору $M(x,y,f(x,y))$, або, що те ж саме, поверхня у тривимірному просторі, задана рівнянням $z = f(x,y)$ (мал. 2)



Мал. 2.

2) Похідні та диференціали функцій багатьох змінних.

Якщо надати аргументам x та y функції $z = f(x,y)$ приростів Δx та Δy відповідно, то отримаємо частинні прирости цієї функції:

$$\Delta_x z = f(x+\Delta x, y) - f(x,y);\ \Delta_y z = f(x, y+\Delta y) - f(x,y);$$

та її повний приріст

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y).$$

Частинними похідними такої функції називають границі відношень її частинних приростів до приростів відповідних аргументів:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x f}{\Delta x},\ \frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y f}{\Delta y}.$$

Для таких частинних похідних використовуються, також, позначення:

$$f_x',\ z_x',\ f_y',\ \frac{\partial z}{\partial y},\ z_y'.$$

З частинними похідними функції тісно пов’язані її частинні диференціанали $d_x f = f_x' dx$, $d_y f = f_y' dy$, та її повний диференціал $df = f_x' dx + f_y' dy$.

Аналогічно до функції однієї змінної, повний диференціал є головною, лінійною відносно приростів аргументів частиною повного приросту функції:

Якщо повний приріст функції може бути представлений у вигляді $\Delta z = df + \alpha dx + \beta dy$, де α, β - нескінченно малі величини при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$, то функція називається диференційованою.

Необхідною умовою диференційованості функції є існування її частинних похідних.

Достатня умова диференційованості функції в точці $M_0(x_0, y_0)$ полягає в тому, що її частинні похідні мають існувати в деякому околі цієї точки і бути неперервними в самій цій точці.

При знаходженні частинної похідної функції по одному з її аргументів решту аргументів вважають сталими величинами і використовують звичайні правила диференціювання та таблицю похідних.

Специфічним є *правило диференціювання* складеної функції багатьох змінних, яке ми розглянемо, знову ж таки, на прикладі функції двох змінних

1) Якщо $x = x(t)$, $y = y(t)$ то $\frac{dz}{df} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial f} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial f}$;

2) Якщо $x = x(u,v)$, то $y = y(u,v)$, $\frac{dz}{du} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$.

Розглянемо основні поняття та означення.

Нехай функція y = f (x) має похідну $y' = \varphi(x)$, при чому $\varphi(x)$ – диференційована. Тоді її похідну $\varphi'(x)$ називають ***другою похідною*** функції y = f(x) і позначають y'', f'', $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d}{dx}(\frac{dy}{dx})$.

Похідну другої похідною називають ***третьою похідною*** і позначають

$$y''', \ f''', \ \frac{d^3y}{dx^3}, \ \frac{d}{dx}(\frac{d}{dx}(\frac{dy}{dx})).$$

Взагалі, ***похідна n – го порядку*** є похідною похідної (n-1) порядку:

$$y^{(n)} = (y^{(n-1)})', \ \frac{d^ny}{dx^n} = \frac{d}{dx}(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}).$$

Порядок похідної може також позначатись римськими цифрами, наприклад y^V – п’ята похідна.

Друга похідна має фізичний зміст: якщо S = S(t) - шлях, пройдений за час t , $S'(t)$ – швидкість момент часу t , $S''(t)$ прискорення в момент часу t .

Приклад. Розглянемо похідні вищих порядків функції y = sin x. Оскільки $y' = \cos x$, то $y'' = (\cos x)' = -\sin x$, $y''' = (-\sin x)' = -\cos x$, $y^{(4)} = (-\cos x) = \sin x$ і т.д. Можна зауважити, що для похідної n -го порядку справедлива формула:

$$y^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right).$$

Якщо функцію задано параметрично співвідношеннями

$$y(x): \begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t). \end{cases}$$

то її перша похідна

$$y'(x): \begin{cases} x = \varphi(t), \\ \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}. \end{cases}$$

,

а

$$y''(x): \begin{cases} x = \varphi(t), \\ \dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{\psi''_{tt}\varphi'_t - \psi'_t\varphi''_{tt}}{(\varphi'_t)^3}. \end{cases}$$

Взагалі, якщо

$$y^{(n-1)}(x): \begin{cases} x = \varphi(t), \\ \dfrac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = \psi_{n-1}(t), \end{cases}$$

то

$$y^{(n)}(x): \begin{cases} x = \varphi(t) \\ \dfrac{d^n y}{dx^n} = \dfrac{(\psi_{n-1})'_t}{\varphi'_t}. \end{cases}$$

Приклад. Повернемось до розгляду функції y = f (x), заданої параметрично системою співвідношень: $y(x): \begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}.$

Було показано, що її похідна y' у цьому випадку задається системою

$$\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = -tgt \end{cases}.$$

Тоді $\frac{d^2y}{dx^2}$ задається системою

$$\begin{cases} x = \cos^3 t, \\ y'' = \dfrac{(-tgt)'}{(\cos^3 t)'} = \dfrac{-\dfrac{1}{\cos^2 t}}{-3\cos^2 t \sin t} = \dfrac{1}{3\cos^4 t \sin t}. \end{cases}$$

Якщо ж функцію задано неявно співвідношенням F(x, y) = 0, то, наприклад, ***її другу похідну знаходять диференціюванням рівності для першої похідної***:

$$y' = \varphi(x, y) \Rightarrow y'' = (\varphi(x, y(x)))'_x = \varphi_1(x, y(x), y'(x)) = \varphi_1(x, y(x), \varphi(x, y)) = \varphi_2(x, y)$$

Повертаючись до знаходження похідних вищих порядків для явно заданих функцій, наведемо наступну корисну формулу, що є узагальненням формули $(u \cdot v)' = u'v + uv'$. **Це – формула Лейбніца**:

$$(u \cdot v)^{(n)} = u^{(n)} \cdot v + C_n^1 \cdot u^{(n-1)} v' + \ldots + C_n^{n-1} \cdot u' v^{(n-1)} + u \cdot v^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}.$$

Диференціалом n-порядку називається диференціал (n -1) порядку: $d^n y = d(d^{n-1} y)$.

Таким чином: $d^2 y = d(dy) = d(y' \cdot dx) = dy' \cdot dx = (y')' \cdot dx \cdot dx = y'' dx^2, \ldots d^n y = y^{(n)} \cdot dx^n$.