ЗАНЯТТЯ № 6

Тема: ***Основні поняття та властивості ліній другого порядку на площині: коло, еліпс, гіпербола, парабола***

Мета:

Навчальна: познайомити студентів з кривими другого порядку, їх властивостями та основними поняттями

Розвиваюча: розвиток уявлення, пам'яті, творчого мислення.

Виховна: виховувати культуру мовного спілкування в ході бесіди, формувати спец лексику, активну громадянську позицію, навики самостійно приймати рішення; розвивати творчий та естетичний потенціал, критичне мислення студентів.

Тип заняття: засвоєння нових знань

Засоби навчання: підручник, комп'ютерні презентації, вправи

Між предметні зв'язки: землеробство

Методи: лекція, пояснення, демонстрування, вправи

Обладнання: комп'ютер, проектор

Кількість годин: 2

Література:

Базова:

1. Аналітична геометрія. Лінійна алгебра: Навчально-методичний посібник /Укл.: І.Д.Пукальський, І.П.Лусте. –Чернівці: Рута, 2007. – 244 с.
2. Вища математика для економістів. Конспект лекцій (І курс) / Уклад.: Ю. П. Буценко, О. О. Диховичний, О. А. Тимошенко. — К: НТУУ «КПІ», 2014. — 256 с.
3. Вища математика: навч. посіб. для студ. вищ. навч. зак. / В.П Дубовик., ІІ. Юрик. - 4-те вид. - К. : Ігнатекс-Україна., 2013. - 648 с: іл. - (Вища школа). - Бібліогр.: с. 632-633.
4. Дюженкова Л. І., Дюженкова О. Ю., Михалін Г. О. Вища математика. Прикладні задачі. – К. : Видавничий центр «Академія», 2003.
5. Кривуца В. Г., Барковський В. В., Барковська Н. В. Вища математика: практикум. – К.: ЦУЛ, 2003.
6. Математика для економістів. Елементи лінійної алгебри: Методичні вказівки та завдання для типових розрахунків / Уклад.: В.М. Долгіх, О.М. Назаренко. − Суми: УАБС НБУ, 2005. − 38 с.
7. Шеченко Р.Л. Основи вищої математики. − Біла Церква, 2005.

Допоміжна:

1. Валуце І. І. Математика для технікумів. – М. : наука, 1990.
2. Піскунов Н. С. Диференціальне числення. – Т.1,2. – М. : Наука, 1997.
3. Соколенко О. І. Вища математика: підручник. – К.: Видавничий центр «Академія», 2002.

Інформаційні ресурси

1. Вища математика для економістів http://matan.kpi.ua/public/files/%D0%92%D0%9C%D0%B4%D0%95.%D0%9A%D0%BE%D0%BD%D1%81%D0%BF%D0%B5%D0%BA%D1%82.pdf
2. Высшая математика https://www.kontrolnaya-rabota.ru/wow/vishaya-matematika/
3. Лекции по висшей математике http://www.toehelp.ru/theory/math/

Структура заняття

1. Організаційна частина.
2. Повідомлення теми, формування мети та основних завдань
3. Актуалізація опорних знань.
4. Мотивація навчальної діяльності
5. Значення теми для майбутньої діяльності; вивчення інших тем і дисциплін, повсякденних справ
6. План заняття
    1) Поняття поверхні другого порядку.
    2) Коло та його рівняння.
    3) Канонічне рівняння еліпса.
    4) Канонічне рівняння гіперболи.
    5) Канонічне рівняння параболи
7. Підведення підсумків
    - узагальнення матеріалу викладачем
    - повідомлення домашнього завдання

Контрольні запитання

1) Назвіть загальне рівняння поверхні другого порядку.
2) Які поверхні відносять до поверхонь другого порядку?
3) Яку поверхню називають конічною поверхнею?
4) Дайте означення кола.
5) Назвіть рівняння:
   - кола радіуса r з центром у початку координат
   - рівняння, що визначає коло, центр якого лежить в точці $O_1(a; b)$
   - що визначати коло з центром на осі Oy
   - що визначати коло з центром на осі Ox
6) Що таке еліпс?
7) Яка рівність представляти рівняння еліпса?
8) Що таке гіпербола?
9) Яка рівність представляти рівняння гіперболи?
10) Що таке парабола?
11) Яка рівність представляти рівняння параболи?

1) Поняття поверхні другого порядку

Поверхнею другого порядку називається множина точок, прямокутні координати яких задовольняють рівняння виду:

$ax^2+by^2+cz^2+dxy+exz+fyz+gx+hy+kz+l=0$, (1)

де принаймні один з коефіцієнтів a, b, c, d, e, f відмінний від нуля.

Рівняння(1) називається загальним рівнянням поверхні другого порядку. Поверхня другого порядку як геометричний об'єкт не змінюється, якщо він заданої прямокутної системи координат перейти до іншої. При цьому рівняння і рівняння, знайдене після перетворення координат, будуть еквівалентні.

Можна довести, що існує система координат, в якій рівняння має найпростіший (або канонічний вигляд).

До поверхонь другого порядку належать, зокрема, циліндричні та конічні поверхні, поверхні обертання, сфера, еліпсоїд, одно порожнинний та двох порожнинний гіперболоїди, еліптичний та гіперболічний параболоїди. Розглянемо ці поверхні та їхні канонічні рівняння.

Циліндричною поверхнею називають поверхню σ, утворену множиною прямих (твірних), які перетинають задану лінію L (напрямну) і паралельні заданій прямій l. Вивчатимемо лише такі циліндричні поверхні, напрямні яких лежать в одній з координатних площин, а твірні паралельні координатній осі, яка перпендикулярна до цієї площини.

Розглянемо випадок, коли твірні циліндричної поверхні паралельні осі Oz, а напрямна лежить в площині Oxy.

Нехай задано рівняння $f(x; y) = 0$, (2)

яке в площина Oxy визначає деяку лінію L – множину точок M (x; y), координати яких задовольняють це рівняння. Дане рівняння задовольняють також координати всіх тих точок N(x; y; z) простору, у яких дві перші координати x і y збігаються з координатами будь-якої точки ліні L, а третя координата z – довільна, тобто тих точок простору, які проектуються на площину Oxy в точки лінії L.

Всі такі точки лежать на прямій, яка паралельна осі Oz і перетинає лінію L в точці M (x; y). Сукупність таких прямих і є циліндричною поверхнею σ.

Якщо точка не лежить на поверхні σ, то вона не може проектуватися в точку лінії L, тобто координати такої точки рівняння (2) не задовольняють. Отже, рівняння (2) визначає поверхню σ. Таким чином, рівняння f (x; y) =0 визначає в просторі циліндричну поверхню, твірні якої паралельні осі Oz, а напрямна L в площині Oxy задається тим самим рівняння f (x; y) =0. Ця сама лінія в просторі Oxzy задається двома рівняннями:

$$\begin{cases} f(x,y)=0 \\ z=0. \end{cases}$$

Аналогічно рівняння f (x; y) =0, в якому відсутня зміна y, визначає в просторі циліндричну поверхню, твірні якої паралельні осі Oy, а напрямна L в площині Oxz задається тим самим рівнянням f (x; y) =0; рівняння f (y; z) =0 визначає в просторі циліндричну поверхню, твірні якої паралельні осі Ox.

Поверхню, утворену обертанням заданої плоскої кривої l навколо заданої прямої (осі обертання), яка лежить в площині кривої l, називають поверхнею обертання.

Нехай лінія l, що лежить в площині Oyz, задана рівняннями:

$$\begin{cases} f(Y,Z)=0 \\ X=0. \end{cases}$$

(X,Y, Z – змінні координати точок лінії l, а x, y, z)= змінні координати точок поверхні).

Розглянемо поверхню, утворену обертанням цієї лінії навколо осі Oz і знайдемо рівняння поверхні обертання.

Проведено через довільну точку M (x, y, z) поверхні обертання площину, перпендикулярну до осі Oz, і позначимо через K і N точки перетину цієї площини з віссю Oz і лінією l.

Оскільки відрізки $|Y|$, KN KM рівні між собою як радіуси, KP = y, PM = x, то $Y=\pm\sqrt{x^2+y^2}$, крім того Z=z. Оскільки координати точки N задовольняють рівняння F(X, Z) = 0,

то, підставляючи в це рівняння замість Y, Z рівні їм величини $\pm\sqrt{x^2+y^2}$, z, дістанемо рівняння:

$$F=\pm\sqrt{x^2+y^2}, z) = 0,$$

яке задовольняє довільна точка M (x; y; z) поверхні обертання. Можна показати, що короординати точок, які н лежать на цій поверхні, рівняння не задовольняють. Отже, рівняння є рівнянням поверхні обертання.

Аналогічно можна скласти рівняння поверхонь обертання навколо осей Ox і Oy. Таким чином, щоб дістати рівняння поверхні обертання кривої навколо якої-небудь координатної осі, треба в рівнянні кривої залишити без зміни координату, яка відповідає осі обертання, а другу координату замінити на квадратний корінь із суми квадратів двох інших координат, взятий із знаком + або -.

Конічні поверхні

Конічною поверхнею називається поверхня, утворена множиною прямих, що проходять через задану точку P і перетинають задану лінію L. При цьому лінія L називається напрямною конічної поверхні, точка P – її вершиною, а кожна з прямих, які утворюють конічну поверхню, - твірною.

Нехай напрямна L задана в прямокутній системі координат рівняннями

$$\begin{cases} F_1(X,Y,Z)=0 \\ F_2(X,Y,Z)=0 \end{cases} \quad (1)$$

а точка P (x_0; y_0;z_0) – вершина конічної поверхні. Щоб скласти рівняння конічної поверхні, візьмемо на поверхні довільну точку M (x; y; z) і позначимо точку перетину твірної PM з напрямною L через N(X,Y, Z).

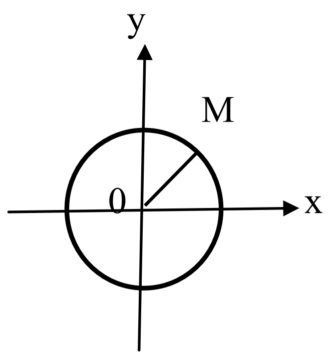
Канонічні рівняння твірних, які проходять через точку N і P, мають вигляд

$$\frac{x-x_0}{X-x_0}=\frac{y-y_0}{Y-y_0}=\frac{z-z_0}{Z-z_0} \quad (2)$$

Виключаючи X,Y, Z з рівнянь дістанемо шукане рівняння конічної поверхні.

2) Коло та його рівняння

<u>Колом</u> називається геометричне місце точок, однаково віддалених від однієї точки, яку називають центром.



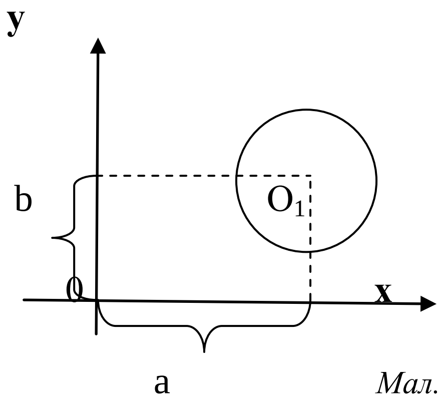
Рівняння кола радіуса r з центром у початку координат має наступний вигляд (мал. 1):

$$x^2 + y^2 = r^2$$

Мал. 1

Запишемо рівняння, що визначає коло, центр якого лежить в точці $O_1(a; b)$ (мал. 2):

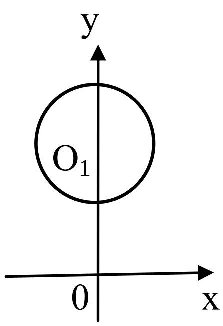
$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$



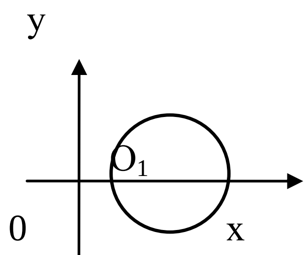
Мал. 2

Нехай a = 0, тоді останнє рівняння перетвориться у наступне:

$x^2 + (y - b)^2 = r^2$ і буде визначати *коло з центром на осі Oy* (мал. 3).



Мал. 3



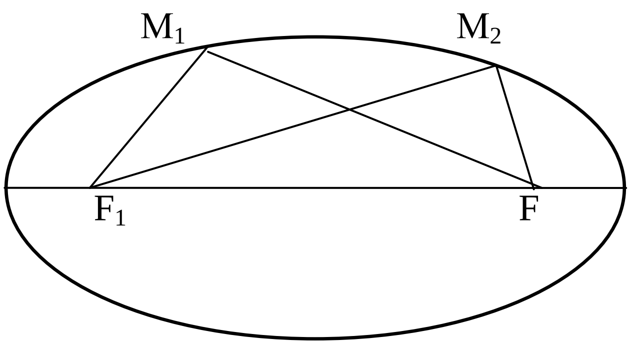
Мал. 4

Якщо ж b = 0, то рівняння перетвориться у наступне: $(x - a)^2 + y^2 = r^2$

і буде визначати *коло з центром на осі Ox* (мал. 4).

3) Канонічне рівняння еліпса

Еліпсом називається геометричне місце точок, сума відстаней від кожної з яких до двох даних точок, що мають назву фокуси є величина постійна (та більша, ніж відстань між фокусами).



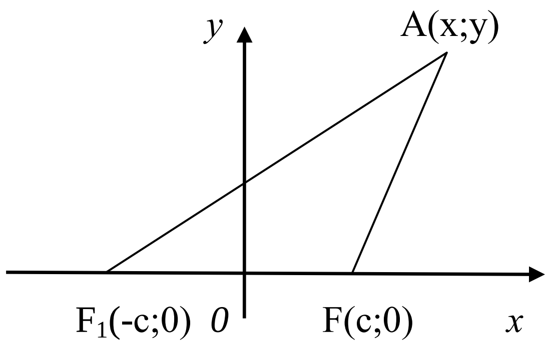
Мал. 5

Візьмемо, наприклад, на еліпсі точки M_1 і M_2 (мал. 5). Якщо фокуси позначити через F_1 і F, то відповідно до даного визначення можна записати:

$$F_1 M_1 + F M_1 = F_1 M_2 + F M_2 = const.$$

Отже, геометричне місце точок, що мають вищезгадану властивість, і буде еліпсом.

На основі визначення еліпса складемо його рівняння. Для цього оберемо систему координат наступним чином. За вісь Ох приймемо пряму, що проходить через фокуси F_1 і F, а за вісь Оу – пряму, що є перпендикулярну до F_1 F та проведену через середину відрізка F_1 F (мал. 6). Позначимо відстань F_1 F між фокусами через 2с, тоді



Мал. 6

координати фокусів будуть мати наступний вигляд:

$F_1(-c;0)$ і $F(c;0)$.

Візьмемо на еліпсі довільну точку A(x;y).

Позначимо постійну величину суми відстаней від кожної точки до фокусів через 2а, тоді $F_1 A + F A = 2a$

За формулою відстаней між двома точками знайдемо

$$F_1A = \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$
$$FA = \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

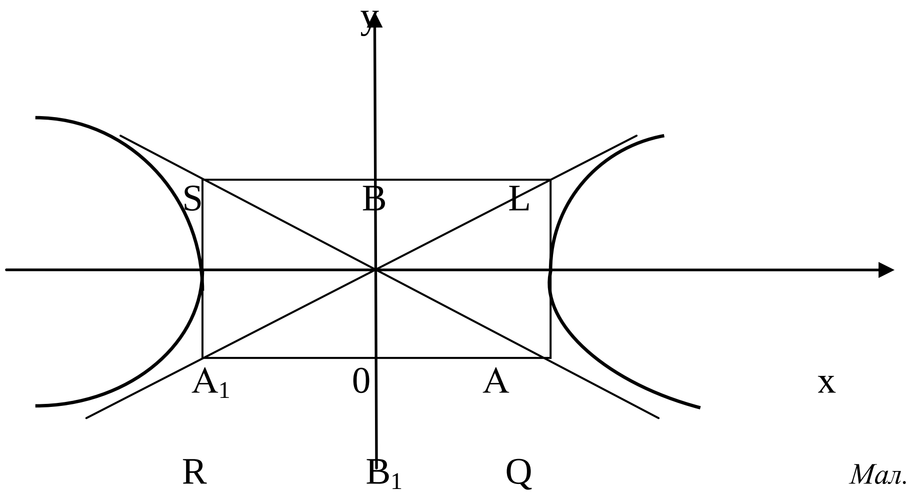
Отже, рівність $F_1 A + F A = 2a$ можна переписати наступним чином

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a$$

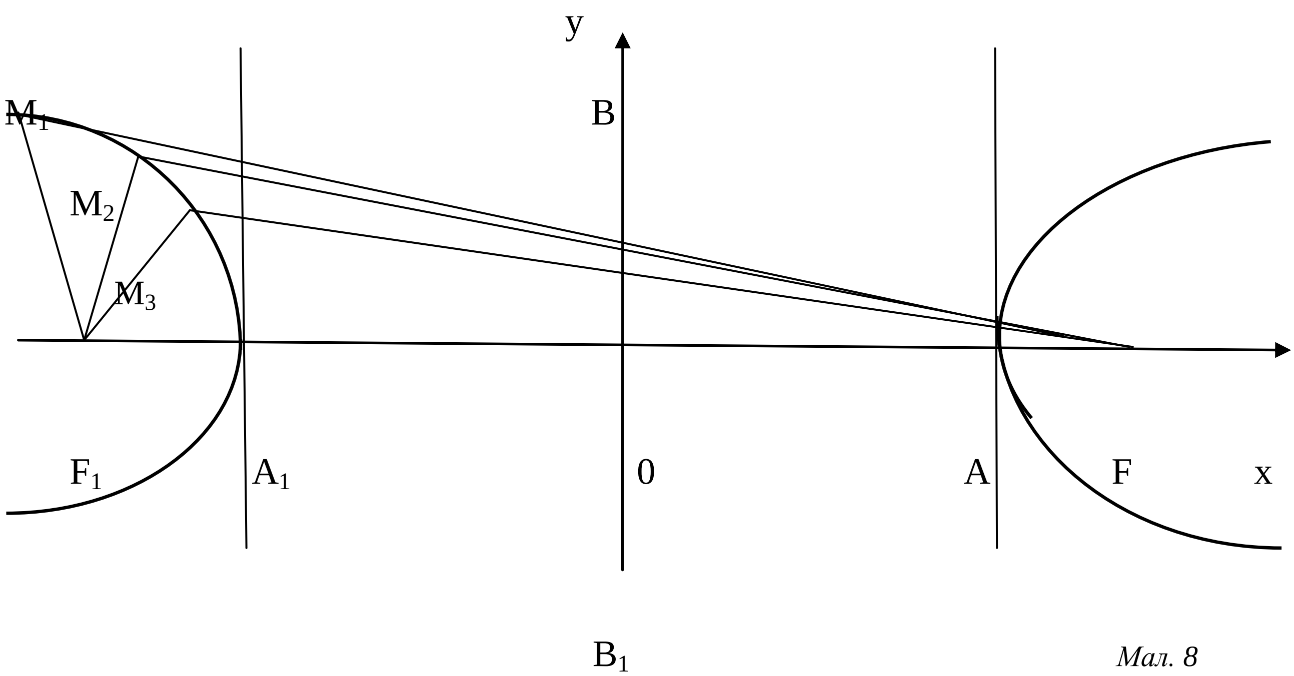
Дана рівність буде представляти *рівняння еліпса* в прийнятій системі координат. Якщо це рівняння спростити (виконати самостійно), то отримаємо *канонічне рівняння* наступного вигляду: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, де $b^2=a^2-c^2$.

4) Канонічне рівняння гіперболи.

Гіперболою називається геометричне місце точок, абсолютна величина різниці відстаней від кожної з яких до двох даних точок, що мають назву фокуси є величина постійна(менша ніж відстань між фокусами та не рівна нулю).



Мал. 7



Мал. 8

Нехай, наприклад, точки M_1, M_2, M_3 лежать на гіперболі, фокуси якої знаходяться в точках F_1 і F(мал.8). тоді, згідно з визначенням гіперболи, можна записати:

Нехай, наприклад, точки M_1, M_2, M_3 лежать на гіперболі, фокуси якої знаходяться в точках F_1 і F(мал.8). тоді, згідно з визначенням гіперболи, можна записати:

$$|F_1 M_1 - F M_1| = |F_1 M_2 - F M_2| = |F_1 M_3 - F M_3| = \text{const}$$

Користуючись визначенням гіперболи, самостійно вивести її рівняння відносно обраної системи координат:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a$$

Спростивши отримане рівняння, матимемо канонічне рівняння гіперболи:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

де $b^2 = c^2 - a^2$

5) Канонічне рівняння параболи.

Пара́бола (від грец. *παραβολή*) — геометричне місце точок, що рівновіддалені від точки і прямої. Одна з кривих другого порядку.

Точка зветься фокусом, а пряма - директрисою.

Парабола, гіпербола та еліпс є конічними перерізами. Парабола є конічним перерізом з одиничним ексцентриситетом. Якщо точкове джерело світла розміщене у фокусі параболоїдного дзеркала, то відбиті від поверхні промені будуть розповсюджуватися паралельно.

Графік функції, що задається за допомогою поліному другого порядку від однієї змінної являє собою ***параболу***.

Канонічне рівняння параболи в прямокутній системі координат:

$y^2 = 2px$(або $x^2 = 2py$, якщо поміняти місцями осі).

Після піднесення в квадрат і деяких перетворень виходить рівняння

Квадратне рівняння $y = ax^2 + bx + c$при $a \neq 0$також представляє собою параболу і графічно зображаєтся тією ж параболою, що і $y = ax^2$, але на відміну від останньої має вершину не в початку координат, а в деякій точці A, координати якої обчислюються за формулами :

$$x_A = -\frac{b}{2a},\ y_A =: -\frac{D}{4a}$$

Рівняння $y = ax^2 + bx + c$ може бути представлено у вигляді $y = a(x - x_A)^2 + y_A$, а у випадку переносу початку координат в точку A канонічним рівнянням. Таким чином для кожного квадратного рівняння можна найти систему координат таку, що в цій системі воно представиться канонічним.

Властивості

- Парабола - крива другого порядку.
- Вона має вісь симетрії, що називається *віссю параболи*. Вісь проходить через фокус і перпендикулярна директрисі.
- Оптична властивість. Пучок променів, паралельних осі параболи, відбиваючись у параболі, збирається в її фокусі. І навпаки, світло від джерела, що знаходиться у фокусі, відображається параболою в пучок паралельних її осі променів.
- Для параболи $y^2 = x$ фокус знаходиться в точці (0,25; 0).
- Якщо фокус параболи відобразити щодо дотичній, то його образ буде лежати на директрисі.
- Парабола є антиподерою прямій.
- Всі параболи подібні. Відстань між фокусом і директрисою визначає масштаб.
- При обертанні параболи навколо осі симетрії виходить еліптичний параболоїд.
- Еволютою параболи є напівкубічна парабола.

Побудова параболи

Параболу $y=ax^2+bx+c$ будують за алгоритмом (через п'ять основних точок): 1. Визначити напрям рогів параболи за знаком першого коефіцієнта: $a>0$ - роги направлені вверх. Якщо $a<0$, то роги параболи параболи направлені вниз.

2. Вичислити координати вершини параболи $x_0= -b/2a$ і $y_0=y(x_0)$

3. Відмітити вершину параболи на координатній площині і через неї провести ось симетрії параболи $x=x_0$

4. Знайти точку перетину параболи з віссю OY (0;c) і відмітити їй симетричну

5. Розв'язати квадратне рівняння $ax^2+bx+c=0$ і відмітити точки на осі OX $(x_1;0)$ $(x_2;0)$

6. Через відмічені п'ять точок провести параболу.

Параболу можна побудувати «по точках», не знаючи рівняння і маючи в наявності тільки фокус і директрису. Вершина є серединою відрізка між фокусом і директрисою. На директрисі задається довільна система відліку з потрібним одиничним відрізком. Кожна наступна точка є перетином серединного перпендикуляра відрізка між фокусом і точкою директриси, що знаходиться на кратному одиничному відрізку відстані від початку відліку, і прямої, що проходить через цю точку і паралельна осі параболи.

Вправи для самоконтролю:

1) Чи належать колу $(x-3)^2 + (y+5)^2 = 16$, дані точки:

   а) A(3; -1)   б) A(3; -9)   в) A(0; -3)

2) Знайти абсцису точки, якщо її ордината дорівнює нулю і вона лежить на колі $(x+2)^2 + (y+3)^2 = 13$

3) Написати рівняння кола з центром в точці O_1, що проходить через точку A, якщо дано:

   а) $O_1(2; 1)$, A(5; 5)   б) $O_1(-3; 2)$, A(-4; 0)

4) Написати рівняння кола, що проходить через дві точки: A(-5; 5) і B(1; 3) та має радіус $r = \sqrt{10}$

5) Знайти координати фокуса параболи $y^2 = 12x$

6) Написати рівняння параболи вершина якої знаходиться у початку координат, а фокус F(0; -4)