ЗАНЯТТЯ № 5

Тема: ***Предмет і методи аналітичної геометрії. Пряма на площині та в просторі. Співвідношення між прямими і площинами***

Мета:

Навчальна: ознайомлення студентів з предметом і методами аналітичної геометрії, вивчення різних видів рівнянь прямої

Розвиваюча: розвиток уявлення, пам'яті, творчого мислення

Виховна: продовжувати формувати світогляд, позитивне ставлення до навчання, виховувати культуру мовного спілкування в ході бесіди.

Тип: комбіноване заняття

Засоби навчання: підручник, макети, ілюстрації

Між предметні зв'язки: землеробство

Методи: лекція, бесіда, вправи

Кількість годин: 2

Література:

Базова:

1. Аналітична геометрія. Лінійна алгебра: Навчально-методичний посібник /Укл.: І.Д.Пукальський, І.П.Лусте. –Чернівці: Рута, 2007. – 244 с.
2. Вища математика для економістів. Конспект лекцій (І курс) / Уклад.: Ю. П. Буценко, О. О. Диховичний, О. А. Тимошенко. — К: НТУУ «КПІ», 2014. — 256 с.
3. Вища математика: навч. посіб. для студ. вищ. навч. зак. / В.П Дубовик., ІІ. Юрик. - 4-те вид. - К. : Ігнатекс-Україна., 2013. - 648 с: іл. - (Вища школа). - Бібліогр.: с. 632-633.
4. Дюженкова Л. І., Дюженкова О. Ю., Михалін Г. О. Вища математика. Прикладні задачі. – К. : Видавничий центр «Академія», 2003.
5. Кривуца В. Г., Барковський В. В., Барковська Н. В. Вища математика: практикум. – К.: ЦУЛ, 2003.
6. Математика для економістів. Елементи лінійної алгебри: Методичні вказівки та завдання для типових розрахунків / Уклад.: В.М. Долгіх, О.М. Назаренко. − Суми: УАБС НБУ, 2005. − 38 с.
7. Шеченко Р.Л. Основи вищої математики. − Біла Церква, 2005.

Допоміжна:

1. Валуце І. І. Математика для технікумів. – М. : наука, 1990.
2. Піскунов Н. С. Диференціальне числення. – Т.1,2. – М. : Наука, 1997.
3. Соколенко О. І. Вища математика: підручник. – К.: Видавничий центр «Академія», 2002.

Інформаційні ресурси

1. Вища математика для економістів http://matan.kpi.ua/public/files/%D0%92%D0%9C%D0%B4%D0%95.%D0%9A%D0%BE%D0%BD%D1%81%D0%BF%D0%B5%D0%BA%D1%82.pdf
2. Высшая математика https://www.kontrolnaya-rabota.ru/wow/vishaya-matematika/
3. Лекции по висшей математике http://www.toehelp.ru/theory/math/

Структура заняття

1. Організаційна частина.
2. Повідомлення теми, формування мети та основних завдань
3. Актуалізація опорних знань.
4. Мотивація навчальної діяльності
5. Значення теми для майбутньої діяльності; вивчення інших тем і дисциплін, повсякденних справ
6. План заняття
   1) Системи координат
   2) Відстань між двома точками
   3) Поділ відрізка пополам
   4) Площа трикутника
   5) Кутовий коефіцієнт прямої
   6) Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом, яка проходить через задану точку
   7) Рівняння прямої яка проходить через дві задані точки
   8) Рівняння прямої у загальному вигляді
   9) Координати точки перетину прямих
7. Підведення підсумків
   - узагальнення матеріалу викладачем
   - повідомлення домашнього завдання

Контрольні запитання

1. Кого вважають засновником аналітичної геометрії? Чому?
2. Дайте порівняльну характеристику декартової та полярної системи координат.
3. За якою формулою знаходиться відстань між двома точками?
4. За якою схемою можна обчислити площу довільного многокутника?
5. Назвіть всі відомі вам рівняння прямої.
6. Яку алгебраїчну форму має рівняння першого порядку(загальний вигляд)?
7. Як знаходяться координати точки перетину прямих?

1. Системи координат

Аналітична геометрія – це наука, яка вивчає методи розв'язування геометричних задач методами аналізу. Основи аналітичної геометрії заклав французький математик Р. Декарт.

Основою аналітичної геометрії є система координат. Систем координат існує багато, але найбільш розповсюджені прямокутна, або декартова система та полярна системи.

<u>*а) Декартова система.*</u> На площині розглядають два взаємно перпендикулярні вектори: горизонтально розташований вектор Ох (вісь Ох) та вертикально розташований вектор Оу (вісь Оу). Точка О є початком координат. Обидві осі мають однаковий або різний масштаб, за допомогою якого для кожної точки на осях знаходиться відстань від початку координат.

Декартова система дозволяє розв'язувати дві задачі:

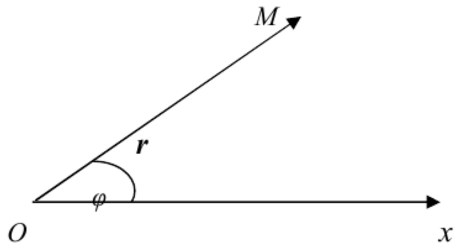
1) знаходження координат невідомої точки шляхом проведення перпендикулярів на осі координат;

2) знаходження місця відомої точки на площині як перетину перпендикулярів, побудованих на осях у точках, що відповідають координатам шуканої точки.

Координатна система дає можливість кожній точці площини поставити у відповідність два числа – координати точки. Перше число є проекцією точки на вісь Ох, а друге – проекцією на вісь Оу. Ці координати можуть бути відомими або невідомими. Якщо координати точки М невідомі, то цю точку позначають М(x;y). Якщо ж вони відомі, то позначають $M(x_1; y_1)$ або $M(x_M; y_M)$, тобто x та y мають при собі числові, або буквені індекси.

<u>*б) Полярна система:*</u> Ця система складається з деякої точки О, що називається полюсом, та горизонтальної осі Ох, що називається полярною віссю.

Будь-яка точка М лежить на прямій ОМ=r, яка називається радіус-вектором і утворює з полярною віссю кут φ, який в полярній системі є аргументом.



Величини r і φ називаються полярними координатами. Точка M в полярних координатах записується у вигляді $M(r;\ \varphi)$. Форми запису координат у декартовій і полярній системах співпадають, тому завжди вживають додаткові пояснення щодо системи координат.

2. Відстань між двома точками

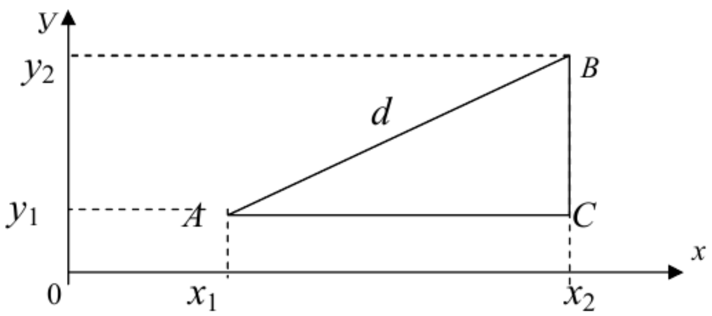
Нехай задано відрізок AB з координатами кінців відрізка $A(x_1; y_1)$ та $B(x_2; y_2)$.

З трикутника ABC маємо: $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2}$. Звідси:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \tag{1}$$

Приклад: Знайти довжину відрізка AB, якщо $A(3;\ 5)$ і $B(7;\ 8)$.

$$d = \sqrt{(7-3)^2 + (8-5)^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5\,.$$



3. Поділ відрізка пополам

Нехай задано відрізок AB з координатами кінців відрізка $A(x_1; y_1)$ та $B(x_2; y_2)$. Точка C є серединою відрізка AB. Тоді координати точки C можна визначити за формулами:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2};\ \ y = \frac{y_1 + y_2}{2} \tag{2}$$

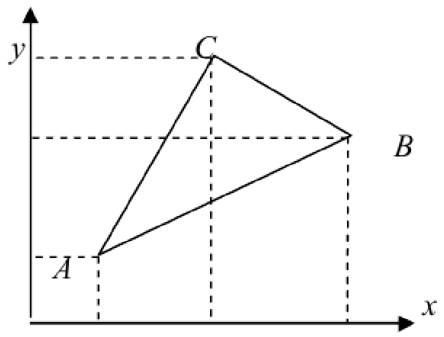
Приклад: Знайти середину відрізка AB, якщо $A(3;\ 5)$ і $B(7;\ 8)$.

$$x_c = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{3+7}{2} = 5\,;\; y_c = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{5+8}{2} = 6{,}5\,.$$

Отже, координати точки *C* (5; 6,5).

4. Площа трикутника

Нехай задано трикутник *ABC* з координатами вершин $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$ та $C(x_3; y_3)$.



Тоді площа трикутника обчислюється за такою схемою:

$$S = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1 - y_1x_2 - y_2x_3 - y_3x_1) \qquad (3)$$

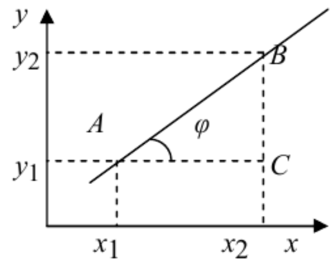
<u>Приклад:</u> Обчислити площу трикутника *A*(2;7), *B*(12;1), *C*(6;15).

$$S = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 12 & 1 \\ 6 & 15 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\left(2 + 180 + 42 - 84 - 6 - 30\right) = 34\,кв.од.$$

За подібною схемою обчислюється площа будь-якого многокутника, але для правильного обходу точок необхідно мати рисунок.

5. Кутовий коефіцієнт прямої

Озн. Рівнянням прямої називається такий математичний зв'язок між змінними *x* та *y*, взятими зі шкали дійсних чисел, при якому кожному значенню *x* відповідає одне і тільки одне значення *y*.



З $_\Delta ABC$ видно, що $tg\varphi = \dfrac{BC}{AC} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Озн. В аналітичній геометрії тангенс кута нахилу прямої до осі Ox називається кутовим коефіцієнтом прямої і позначається через k. Отже:

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}. \qquad (4)$$

<u>Приклад:</u> Знайти кутовий коефіцієнт прямої AB, якщо $A(6;\,8)$; $B(-10;\,12)$.

$k = \dfrac{-10-6}{12-8} = \dfrac{-16}{4} = -4$. Пряма нахилена до осі Ox під тупим кутом.

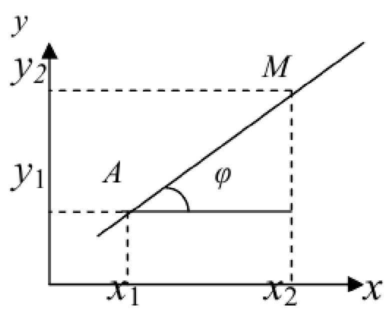
6. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом, яка проходить через задану точку

Виберемо на прямій довільну точку M з невідомими координатами x та y. Тоді для кутового коефіцієнта можемо записати:

$k = \dfrac{y - y_1}{x - x_1} \Rightarrow y - y_1 = k(x - x_1)$.

Отже, рівняння прямої з відомим кутовим коефіцієнтом, яка проходить через одну задану точку, має канонічний вигляд:

$$y - y_1 = k(x - x_1) \qquad (5)$$



<u>Приклад:</u> Записати рівняння прямої, що проходить через точку $A(2;\,4)$ з заданим кутовим коефіцієнтом $k = 3$.

Згідно формули (5) одержимо: $y-4=3(x-2)$.

7. Рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки

Використаємо рівняння прямої через одну задану точку $y-y_1=k(x-x_1)$. При відомих координатах точок A і B маємо:

$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$. Тоді $y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)\Rightarrow\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$.

Отже, рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки, має вигляд:

$$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}. \qquad (6)$$

Рівняння (6) завдяки відсутності кутового коефіцієнта і необхідності користуватись таблицею тангенсів відноситься до найбільш вживаних на практиці.

Приклад: Записати рівняння прямої, що проходить через точки A та B з координатами $A(2;\,3)$; $B(6;\,8)$.

$$\frac{y-3}{8-3}=\frac{x-2}{6-2} \quad \Rightarrow\frac{y-3}{5}=\frac{x-2}{4}.$$

8. Рівняння прямої у загальному вигляді

Алгебраїчна форма рівняння першого порядку має вигляд:

$$Ax+By+C=0. \qquad (7)$$

До цієї форми зводиться будь-яке з попередніх рівнянь.

З рівняння у загальному вигляді можемо отримати рівняння прямої, яка відтинає на осі ординат відомий відрізок, а також кутовий коефіцієнт прямої:

$$By=-Ax-C\Rightarrow y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}, \text{ звідки}$$

$$k=-\frac{A}{B} \qquad (8)$$

Висновок. Якщо рівняння задане в загальному вигляді, то тангенс кута нахилу прямої визначається відношенням коефіцієнта при x до коефіцієнта при y, взятому з оберненим знаком

Приклад: Знайти кутовий коефіцієнт прямої, що задана рівнянням $3x-4y-12=0$.

З формули (8) маємо: $k=\frac{3}{-4}=\frac{3}{4}$.

9. Координати точки перетину прямих

Якщо рівняння прямих, що перетинаються в точці $A(x_0;y_0)$, задані в загальному вигляді, то точка перетину цих прямих є точкою, координати якої є такими, що задовольняють обидва рівняння і знаходяться з розв'язування системи рівнянь:

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2=0 \end{cases} \qquad (9)$$

Приклад: Знайти точку перетину прямих, що задаються рівняннями $3x+5y-8=0$ та $7x-4y-3=0$.

Координати точки перетину прямих знаходимо із системи рівнянь:

$$\begin{cases} 3x+5y=8 \\ 7x-4y=3 \end{cases}.$$

Систему обчислимо методом Крамера:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 7 & -4 \end{vmatrix}=-12-35=-47;$$

$$\Delta=\begin{vmatrix} 8 & 5 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}=-32-15=-47;\ \Delta_y=\begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 7 & 3 \end{vmatrix}=9-56=-47.$$

З формул Крамера маємо: $x_0=\frac{\Delta_x}{\Delta}=1$; $y_0=\frac{\Delta_y}{\Delta}=1$. Отже, $A(1;\ 1)$.