

ЗАНЯТТЯ № 2

Тема: *Форми комплексних чисел: алгебраїчна, тригонометрична, показникова. Дії над комплексними числами.*

Мета:

Навчальна: оволодіти знаннями про комплексні числа, різні форми комплексних чисел, дії над комплексними числами.

Розвиваюча: розвиток уявлення, пам'яті, творчого мислення.

Виховна: виховувати культуру мовного спілкування в ході бесіди, формувати спец лексику, активну громадянську позицію, навички самостійно приймати рішення; розвивати творчий та естетичний потенціал, критичне мислення студентів.

Тип заняття: засвоєння нових знань

Засоби навчання: підручник, ілюстрації

Між предметні зв'язки: агрохімія

Методи: лекція, пояснення, бесіда, вправи

Кількість годин: 2

Література:

Базова:

1. Аналітична геометрія. Лінійна алгебра: Навчально-методичний посібник / Укл.: І.Д.Пукальський, І.П.Лусте. —Чернівці: Рута, 2007. — 244 с.
2. Вища математика для економістів. Конспект лекцій (І курс) / Уклад.: Ю. П. Буценко, О. О. Диховичний, О. А. Тимошенко. — К: НТУУ «КПІ», 2014. — 256 с.
3. Вища математика: навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. / В.П Дубовик., П. Юрик. - 4-те вид. - К. : Ігнатекс-Україна., 2013. - 648 с: іл. - (Вища школа). - Бібліогр.: с. 632-633.
4. Дюженкова Л. І., Дюженкова О. Ю., Михалін Г. О. Вища математика. Прикладні задачі. — К. : Видавничий центр «Академія», 2003.
5. Кривуца В. Г., Барковський В. В., Барковська Н. В. Вища математика: практикум. — К.: ЦУЛ, 2003.
6. Математика для економістів. Елементи лінійної алгебри: Методичні вказівки та завдання для типових розрахунків / Уклад.: В.М. Долгих, О.М. Назаренко. — Суми: УАБС НБУ, 2005. — 38 с.
7. Шеченко Р.Л. Основи вищої математики. — Біла Церква, 2005.

Допоміжна:

1. Валуце І. І. Математика для технікумів. — М. : наука, 1990.
2. Піскунов Н. С. Диференціальне числення. — Т.1,2. — М. : Наука, 1997.
3. Соколенко О. І. Вища математика: підручник. — К.: Видавничий центр «Академія», 2002.

Інформаційні ресурси

1. Вища математика для економістів

<http://matan.kpi.ua/public/files/%D0%92%D0%9C%D0%B4%D0%95.%D0%9A%D0%BE%D0%BD%D1%81%D0%BF%D0%B5%D0%BA%D1%82.pdf>

2. Высшая математика <https://www.kontrolnaya-rabota.ru/wow/vishaya-matematika/>

3. Лекции по высшей математике <http://www.toehelp.ru/theory/math/>

Структура заняття

1. Організаційна частина.
2. Актуалізація опорних знань.
3. Повідомлення теми, формування мети та основних завдань
4. Мотивація навчальної діяльності

Значення теми для майбутньої діяльності; вивчення інших тем і дисциплін, повсякденних справ

5. План заняття

- 1) Комплексні числа (історична довідка)
- 2) Означення комплексного числа і уявної одиниці
- 3) Рівні, спряжені та протилежні комплексні числа
- 4) Геометричне зображення комплексного числа.
- 5) Дії над комплексними числами.
- 6) Тригонометрична форма комплексного числа. Дії над комплексними числами, які записані у тригонометричній формі.

6. Підведення підсумків

- узагальнення матеріалу викладачем
- повідомлення домашнього завдання

Контрольні запитання

1. Які числа називають комплексними?
2. Яке число називають уявною одиницею?
3. Які комплексні числа називають рівними між собою, а які спряженими?
4. Наведіть приклад протилежних комплексних чисел.
5. Який вигляд мають комплексні числа задані в алгебраїчній, в показниковій та в тригонометричній формі?
6. Перерахуйте дії які виконуються над комплексними числами.

1. Комплексні числа (історична довідка)

У багатьох розділах математики та її застосуваннях неможливо обмежитись розглядом лише дійсних чисел. Вже досить давно під час розв'язування різних задач виникла потреба добувати квадратний корінь з від'ємних чисел. Щоб ця дія стала можливою, ввели множину нових чисел.

Історично введення комплексних чисел виявилось пов'язаним із отриманням формули обчислення коренів кубічного рівняння:

$$x^3 = px + q. \quad (1)$$

У першій третині XVI століття італійський математик Н. Тарталья показав, що корінь цього рівняння завжди представляється виразом

$$x = \sqrt[3]{u} + \sqrt[3]{v}, \quad (2)$$

де u і v — розв'язки системи рівнянь

$$u + v = q, uv = \left(\frac{p}{3}\right)^3 \quad (3)$$

Так, наприклад, щоб знайти корінь кубічного рівняння

$$x^3 = 9x + 28,$$

необхідно скласти систему (3) для даного рівняння, порахувавши яку, отримаємо:

$$u = 27, v = 1 \text{ і}$$

$$u = 1, v = 27.$$

Використовуючи співвідношення (2), знаходимо, що 4, тобто число 4 є коренем даного рівняння. Проте виявилось, що існують кубічні рівняння, для яких система (3) не має рішень в множині дійсних чисел, тоді як кубічне рівняння має дійсний корінь. Наприклад, рівняння $x^3 = 15x + 4$ має дійсний корінь $x = 4$, в чому легко переконатися, підставивши в дане рівняння замість x число 4. Якщо ж для даного рівняння написати систему (3), то виявиться, що ця система не матиме рішень в множині дійсних чисел. Це незрозуміле тоді явище вперше пояснив італійський математик Р. Бомбеллі в 1572 р. і його пояснення, по суті, сприяло введенню поняття

комплексного числа, основних правил і дій над комплексними числами.

Проте аж до XIX століття, не дивлячись на те, що апарат комплексних чисел дозволив отримати багато важливих фактів, що відносяться також і до дійсних чисел, само існування комплексних чисел багатьом математикам здавалося вельми сумнівним. Лише у XIX столітті після появи робіт К. Гауса, в яких давалося наочне геометричне зображення комплексних чисел (як точок або векторів на площині), існування комплексних чисел стало загальновизнаним фактом.

Згадаємо ще один факт, який також приводить до думки про необхідність розширення множини дійсних чисел до множини комплексних чисел. Як відомо, натуральний степінь будь-якого дійсного числа знову буде дійсним числом. Проте операція отримання кореня (зворотна операції піднесення до степеня) не завжди здійснима в множині дійсних чисел: не існує дійсного числа a , парна міра якого була б від'ємним числом. Іншими словами, в множині дійсних чисел не існує числа, яке було б коренем рівняння

$$x^n = b,$$

де n — парне число, а b — від'ємне дійсне число.

Слідуючи загальному плану розширення числових областей, як це вже неодноразово робилося (наприклад, при введенні понять від'ємних чисел і раціональних чисел), множину дійсних чисел можна розширити до множини чисел, яка буде замкнута відносно операції отримання кореня. Забігаючи вперед, відмітимо, що при цьому виходить істотно новий результат і для тих випадків, коли операція отримання кореня може здійснюватись в множині дійсних чисел.

Один із способів побудови множини комплексних чисел полягає в тому, що, множина дійсних чисел розширюється шляхом приєднання до множини дійсних чисел нового числового об'єкту — кореня рівняння

$$x^2 + 1 = 0.$$

Отримана «розширена» множина називається множиною комплексних чисел.

2. Означення комплексного числа і уявної одиниці

Число $a + bi$, де a і b – будь-які дійсні числа, i – уявна одиниця, називається **комплексним числом** (a – дійсна частина, bi – уявна частина комплексного числа, а b – коефіцієнт при уявній частині).

Число, квадрат якого дорівнює -1 , позначають буквою i і називають **уявною одиницею** (i – перша буква латинського слова *imaginarius* – уявний).

Тобто, для символу i виконується рівність

$$i \cdot i = i^2 = -1.$$

Запис $a + bi$ називають **алгебраїчною формою комплексного числа**.

Примітка! Слово "комплексний" означає складений.

Часто комплексне число позначають буквою z і записують $z = a + bi$.

Комплексні числа – це розширення числової системи дійсних чисел. Позначаються вони буквою C .

Множина дійсних чисел є частиною (підмножиною) множини комплексних чисел.

Для комплексних чисел означені алгебраїчні операції додавання та множення, які узагальнюють додавання та множення дійсних чисел із збереженням властивостей асоціативності, комутативності та дистрибутивності.

3. Рівні, спряжені та протилежні комплексні числа

Які комплексні числа називаються рівними, спряженими, протилежними?

Два комплексних числа $a + bi$ і $c + di$ **рівні між собою** тоді і тільки тоді, коли $a = c$ і $b = d$, тобто, коли рівні їх дійсні частини і коефіцієнти при уявних частинах.

Поняття "більше" і "менше" для комплексних чисел не має смислу. Ці числа за величиною не порівнюють. Тому не можна, наприклад, сказати, яке з двох комплексних чисел більше $10i$ чи $3i$, $2 + 5i$ чи $5 + 2i$.

Числа $a + bi$ і $a - bi$, дійсні частини яких рівні, а коефіцієнти при уявних частинах рівні за модулем, але протилежні за знаком, називають **спряженими**.

Приклад.

1. Спряженими є комплексні числа $4 + 3i$ та $4 - 3i$.

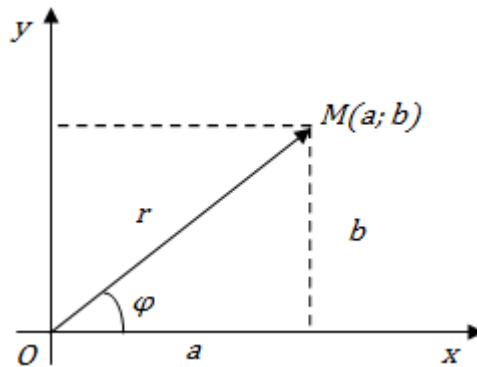
2. Якщо дано число $6i$, то спряженим до нього є $-6i$.

3. До числа 11 спряженим буде 11 , бо $11 + 0i = 11 - 0i$.

Числа $a + bi$ та $-a - bi$ називаються протилежними. Тобто, два числа $a + bi$ та $-a - bi$, сума яких дорівнює нулю, називають **протилежними**.

4. Геометричне зображення комплексного числа.

Комплексне число $z = a + bi$ геометрично зображують точкою $M(a; b)$ координатної площини.



Зручно комплексне число зобразити у вигляді вектора

$$\overrightarrow{OM}(a; b).$$

Довжина вектора, який зображає комплексне число, називається **модулем цього комплексного числа**. Модуль комплексного числа позначається r . Тобто

$$r = |z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Кут φ між додатним напрямком осі абсцис і вектором $\overrightarrow{OM}$ називається **аргументом комплексного числа**.

Примітка! Кожне комплексне число, що не дорівнює нулю, має нескінченну множину аргументів, які відрізняються один від одного на $360^\circ k$, де $k \in \mathbb{Z}$.

$$\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}$$

5. Дії над комплексними числами.

Нехай дано два комплексні числа $z_1 = a_1 + b_1 i$ та $z_2 = a_2 + b_2 i$.

а) Додавання комплексних чисел.

Сумою двох комплексних чисел $a_1 + b_1 i$ та $a_2 + b_2 i$ називається комплексне число $(a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$, дійсна частина якого і коефіцієнт при уявній частині

дорівнюють відповідно сумі дійсних частин і коефіцієнтів при уявних частинах додатків.

Приклади (додавання комплексних чисел):

$$1. (-3 + 5i) + (4 - 8i) = (-3 + 4) + (5 - 8)i = 1 - 3i$$

$$2. (3 + 2i) + (-1 - 5i) = (3 - 1) + (2 - 5)i = 2 - 3i$$

$$3. (2 + 3i) + (6 - 3i) = (2 + 6) + (3 - 3)i = 8 + 0i = 8$$

$$4. (10 - 3i) + (-10 + 3i) = (10 - 10) + (-3 + 3)i = 0 + 0i = 0$$

Примітка! Означення суми комплексних чисел поширюється і на випадок трьох і більше доданків.

б) Віднімання комплексних чисел.

Різницею двох комплексних чисел $a_1 + b_1i$ і $a_2 + b_2i$ називається комплексне число $(a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$.

Приклади (віднімання комплексних чисел):

$$1. (-5 + 2i) - (3 - 5i) = (-5 - 3) + (2 - (-5))i = -8 + 7i$$

$$2. (6 + 7i) - (6 - 5i) = (6 - 6) + (7 + 5)i = 12i$$

$$3. (0,3 + 2,5i) - (-0,75 + 1,5i) = (0,3 + 0,75) + (2,5 - 1,5)i = 1,05 + i$$

в) Множення комплексних чисел.

Добутком двох комплексних чисел $a_1 + b_1i$ і $a_2 + b_2i$ називається комплексне число $(a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + b_1a_2)i$.

Приклад (множення комплексних чисел):

$$\begin{aligned}(1 - 2i) \cdot (3 + 2i) &= (1 \cdot 3 - (-2) \cdot 2) + (1 \cdot 2 + (-2) \cdot 3)i = \\ &= (3 + 4) + (2 - 6)i = 7 - 4i.\end{aligned}$$

Добуток двох спряжених комплексних чисел:

$$(a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 + b^2.$$

г) Ділення комплексних чисел.

Часткою комплексних чисел $a_1 + b_1i$ і $a_2 + b_2i$ називається комплексне число

$$\frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} - \frac{a_1b_2 - b_1a_2}{a_2^2 + b_2^2}i.$$

Приклад (знайти частку комплексних чисел):

$$\frac{7 - 4i}{3 + 2i} = \frac{(7 - 4i)(3 - 2i)}{(3 + 2i)(3 - 2i)} = \frac{13 - 26i}{13} = 1 - 2i.$$

6. Тригонометрична форма комплексного числа. Дії над комплексними числами, які записані у тригонометричній формі.

Виразивши a і b через модуль r і аргумент φ , комплексне число $a + bi$ запишемо у вигляді

$$a + bi = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

Права частина цієї тотожності називається **тригонометричною формою комплексного числа**.

Дії над комплексними числами, які записані у тригонометричній формі.

Нехай задано два комплексні числа:

$$z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1), \quad z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2).$$

1. Множення

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)).$$

2. Ділення

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)).$$

3. Піднесення до степеня (формула Муавра)

$$z^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi).$$

4. Добування кореня

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right),$$

$$k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$