ЗАНЯТТЯ № 10

Тема: ***Первісна та її властивості. Невизначений інтеграл та його властивості. Таблиця основних невизначених інтегралів***

Мета:

Навчальна: ознайомлення з первісною, невизначеним інтегралом та їх властивостями

Розвиваюча: розвиток уявлення, пам'яті, творчого мислення

Виховна: продовжувати формувати світогляд, позитивне ставлення до навчання, виховувати культуру мовного спілкування в ході бесіди.

Тип: комбіноване заняття

Засоби навчання: підручник, роздатковий матеріал

Між предметні зв'язки: землеробство

Методи: лекція, бесіда, ілюстрування

Кількість годин: 2

Література:

Базова:

1. Аналітична геометрія. Лінійна алгебра: Навчально-методичний посібник /Укл.: І.Д.Пукальський, І.П.Лусте. –Чернівці: Рута, 2007. – 244 с.

2. Вища математика для економістів. Конспект лекцій (I курс) / Уклад.: Ю. П. Буценко, О. О. Диховичний, О. А. Тимошенко. — К: НТУУ «КПІ», 2014. — 256 с.

3. Вища математика: навч. посіб. для студ. вищ. навч. зак. / В.П Дубовик., ІІ. Юрик. - 4-те вид. - К. : Ігнатекс-Україна., 2013. - 648 с: іл. - (Вища школа). - Бібліогр.: с. 632-633.

4. Дюженкова Л. І., Дюженкова О. Ю., Михалін Г. О. Вища математика. Прикладні задачі. – К. : Видавничий центр «Академія», 2003.

5. Кривуца В. Г., Барковський В. В., Барковська Н. В. Вища математика: практикум. – К.: ЦУЛ, 2003.

6. Математика для економістів. Елементи лінійної алгебри: Методичні вказівки та завдання для типових розрахунків / Уклад.: В.М. Долгіх, О.М. Назаренко. − Суми: УАБС НБУ, 2005. − 38 с.

7. Шеченко Р.Л. Основи вищої математики. − Біла Церква, 2005.

Допоміжна:

1. Валуце І. І. Математика для технікумів. – М. : наука, 1990.

2. Піскунов Н. С. Диференціальне числення. – Т.1,2. – М. : Наука, 1997.

3. Соколенко О. І. Вища математика: підручник. – К.: Видавничий центр «Академія», 2002.

Інформаційні ресурси

1. Вища математика для економістів http://matan.kpi.ua/public/files/%D0%92%D0%9C%D0%B4%D0%95.%D0%9A%D0%BE%D0%BD%D1%81%D0%BF%D0%B5%D0%BA%D1%82.pdf

2. Высшая математика https://www.kontrolnaya-rabota.ru/wow/vishaya-matematika/

3. Лекции по висшей математике http://www.toehelp.ru/theory/math/

Структура заняття

1. Організаційна частина.
2. Повідомлення теми, формування мети та основних завдань
3. Актуалізація опорних знань.
4. Мотивація навчальної діяльності
5. Значення теми для майбутньої діяльності; вивчення інших тем і дисциплін, повсякденних справ
6. План заняття
   1) Первісні та невизначений інтеграл функції, їх властивості.
   2) Таблиця основних інтегралів. Основні правила та методи інтегрування.
7. Підведення підсумків
   - узагальнення матеріалу викладачем
   - повідомлення домашнього завдання

Контрольні запитання

1. Дати означення первісної, невизначеного інтеграла.
2. Назвіть основні властивості невизначеного інтеграла.
3. Яку операцію називають інтегруванням? До якої математичної операції вона є оберненою?
4. Назвіть основні правила інтегрування.
5. З основних методів інтегрування зазвичай виділяють три. Назвіть їх.

1) Первісні та невизначений інтеграл функції, їх властивості.

Традиційним для математики є підхід, при якому разом із запровадженням деякої дії (операції) розглядається обернена (зворотна) до неї. Так, разом із операцією диференціювання функцій розглядається операція їх інтегрування.

Первісною будемо називати функцію F(x) для заданої функції f(x), якщо F'(x) = f (x).

Зауважимо, що з правил диференціювання випливає $\left[F(x)+c\right]' = f(x)$. Більше того, справедлива основна властивість первісних: будь-які дві первісні для заданої функції відрізняються лише сталим доданком. Дійсно, якщо $F_1(x)$ та $F_2(x)$ – первісні $f(x)$, то $\left[F_1(x)-F_2(x)\right]'=0$, тобто $F_1(x)-F_2(x)$ - стала. Таким чином, для знаходження всієї множини первісних функцій f(x) досить знайти одну з них і додати до неї довільну сталу.

Невизначеним інтегралом називається сукупність всіх первісних функції f(x) і його позначають $\int f(x)dx$.

Як випливає з попереднього, $\int f(x)dx = F(x)+C$, де F(x) – деяка (довільна) первісна f(x), C – довільна стала.

Знак $\int$ (стилізована літера S) називається знаком інтеграла, f(x)– підінтегральною функцією, $f(x)dx$ – підінтегральним виразом, x - змінною інтегрування, а процес знаходження інтеграла – інтегруванням. Зазначимо, що інтеграл існує, якщо f(x) - неперервна функція.

Основними властивостями невизначеного інтеграла є наступні:

1) Диференціал інтеграла є підінтегральний вираз.

Дійсно, якщо за означенням $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$, то $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$

2) Невизначений диференціал від диференціала функції дорівнює

сумі цієї функції та довільної сталої.

Дійсно, $\int dF(x) = \int F'(x)dx = \int f(x)dx = F(x) + c$.

2) Таблиця основних інтегралів. Основні правила та методи інтегрування.

Аналогічно до того, як це робилося для похідних, розглянемо таблицю інтегралів деяких основних функцій (сенс вибору   як змінної інтегрування буде пояснений пізніше).

1. $\int 0du = C$.
2. $\int du = u + C$.
3. $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, (n \neq -1)$.
4. $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$.
5. $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$.
6. $\int e^u du = e^u + C$.
7. $\int \sin u du = -\cos u + C$.
8. $\int \cos u du = \sin u + C$.
9. $\int \frac{du}{\cos^2 u} = \mathrm{tg} u + C$.
10. $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\mathrm{ctg} u + C$.
11. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + C$.
12. $\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{u}{a} + C$.
13. $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C$ – «високий логарифм».
14. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + a}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 + a}\right| + C$ - «довгий логарифм».
15. $\int \frac{udu}{u^2 + a} = \frac{1}{2}\ln\left|u^2 + a\right| + C$ - «корисний логарифм».

Основні правила інтегрування випливають з основних правил диференціювання і полягають у наступному:

1) Сталий множник виноситься за знак інтеграла.

2) Інтеграл алгебраїчної суми дорівнює алгебраїчній сумі інтегралів.

З основних методів інтегрування зазвичай виділяють три.

А. Метод розкладу

Цей метод ґрунтується на другому правилі інтегрування і полягає в тому, що підінтегральна функція представляється у вигляді суми функцій більш зручних для інтегрування, ніж вихідна. Надалі цей метод буде використаний для інтегрування дробово-раціональних функцій.

Б. Метод заміни змінної (підстановки)

З правила диференціювання складної функцій випливає інваріантність форми першого диференціалу: якщо $y = f(u),\ u = \varphi(x)$, то $dy = f'(u)du = f'(\varphi(x))\varphi'(x)dx$, таким чином, якщо $\int f(u)du = F(u) + c$, то $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = F(\varphi(x)) + c$. (легко перевірити, знаходячи диференціали обох частин рівності).

Це означає, що при знаходженні інтегралів можливе використання наступних прийомів:

1) здійснити підстановку $x = \varphi(t)$, в результаті чого $\int f(x)dx$ перетвориться на $\int f(x(t))x'(t)dt$, причому останній може виявитись більш простим;

2) зробити заміну змінної $t = \varphi(x)$, що знову ж таки може привести до більш зручного інтегралу.

В. Метод інтегрування частинами

Нагадаємо, що справедливе співвідношення $d(uv) = du \cdot v + u \cdot dv$, або, що те ж саме, $u \cdot dv = d(uv) - v \cdot du$. Знаходячи інтеграли лівої та правої частин останньої рівності і використавши другу основну властивість невизначеного інтегралу, маємо

$$\int udv = \int d(uv) - \int vdu = uv - \int vdu.$$

Рівність $\int udv = uv - \int vdu$ називається формулою інтегрування частинами і дає можливість обчислювати деякі інтеграли, користуючись представленням їх підінтегрального виразу f(x) у вигляді $u(x)v'(x)dx = u(x)dv(x)$, що дозволяє перейти до інтегралу $\int v(x)u'(x)dx = \int v(x)du(x)$. Такий метод знаходження інтегралів використовується, в основному, в трьох варіантах:

1) Зниження степеня.
2) «Алгебризація».
3) «Інтегрування по колу».